

## 「FLIP 研究会 14 年間の検討成果のまとめ」の作成について

ご存じのように、平成 23 年 3 月 11 日に発生した東北地方太平洋沖地震では、広範囲で多くの被害が発生いたしました。地震による被害を防止するために、地震工学・地盤工学の研究者・技術者の責務は大きく、耐震工学の一層の進展が必要とされていることが実感されます。

遡ると、平成 7 年 1 月 17 日に発生した兵庫県南部地震においても、神戸港の岸壁などで、地震による大被害を我々は経験しております。この時も、生じた被害や観測された地震動の大きさに地震工学・地盤工学の研究者・技術者は驚きました。そして、壊れる・壊れない、の 2 分法ではなく、地震時の構造物の挙動や被害の程度（耐震性）を評価していく設計法が導入されてきました。このような、耐震性能評価に基づく耐震設計法の流れは、現在までに調査・分析されている範囲での議論にはなりますが、今回の東北地方太平洋沖地震の経験を踏まえても否定されることなく、今後加速されていくことと思います。

性能に基づく耐震設計において重要なことの一つは、地震時の構造物の挙動や変形を予測するツールとしての解析手法の整備・普及です。兵庫県南部地震の経験により、解析ツールの整備・普及が必要なことが実感され、平成 9 年より、FLIP 研究会の活動が実施されました。FLIP 研究会では、プログラムの改良や高度な解析技術の検討が 4 期 14 年にわたり、実施されました。

今回、FLIP 研究会から一般社団法人 FLIP コンソーシアムへと、プログラムの改良や高度な解析技術の検討の場が移行する機会に、これまでに実施された技術検討の成果のとりまとめを行うこととし、理論編及び事例編の二部構成で、本報告書が作成されました。また、せっかくの機会でもあり、研究会以外の場における検討成果についても、会員各位に有用なもので、掲載の許可が得られたものは、報告書で取り上げることいたしました。

しかしながら、限られた期間でのとりまとめでもあり、必ずしも完全な形でのとりまとめには至っておりません。具体的には、FLIP の改良を踏まえ、本来であれば、現行のプログラムでの再検討が望ましい事項についても、旧版の結果を引用するにとどまりました。また、図面については現状のデータを利用しているため、一部見にくいものも存在しています。さらに、研究会以外の場における検討成果については、必ずしも研究会の場で合意が得られているものではなく、賛否両論ある内容も含んでおります。

以上をご理解の上、本報告書を活用いただけますようお願い申し上げます。

FLIP 研究会 14 年間の検討成果のまとめ WG

## FLIP 研究会 14 年間の検討成果のまとめ WG メンバー

(50 音順, 敬称略, 所属名は略称)

井合進 (京都大学, FLIP 研究会特別委員)  
池野勝哉 (五洋建設)  
一井康二 (広島大学, FLIP 研究会特別委員) : WG 主査  
上田恭平 (港湾空港技術研究所)  
大矢陽介 (港湾空港技術研究所)  
小堤治 (明窓社)  
小野寺隆柔 (沿岸技術研究センター)  
川崎栄久 (沿岸技術研究センター)  
北出圭介 (中電技術コンサルタント)  
木下洋樹 (不動テトラ)  
曲伝軍 (応用解析)  
国生隼人 (八千代エンジニアリング)  
塩崎禎郎 (JFE スチール)  
関谷千尋 (沿岸技術研究センター)  
田代聡一 (東亜建設工業)  
溜幸生 (東電設計)  
富安良一 (八千代エンジニアリング)  
中原知洋 (五洋建設)  
野津厚 (港湾空港技術研究所)  
秦吉弥 (日本工営)  
兵頭順一 (東電設計)  
藤井紀之 (応用地質)  
三上武子 (応用地質)  
村上巧一 (ニュージェック)  
吉澤大造 (応用地質)

### <WG 開催履歴>

- 第 1 回 WG : 平成 23 年 4 月 26 日 PM1:00~3:00, 於 : 沿岸技術センター会議室  
とりまとめ方針の議論, 担当案の検討, 等
- 第 2 回 WG : 平成 23 年 5 月 24 日 PM1:30~4:30, 於 : 沿岸技術センター会議室  
各担当の概略の確認, 原稿分量の確認, 等
- 第 3 回 WG : 平成 23 年 6 月 13 日 PM1:30~3:30, 於 : 沿岸技術センター会議室  
原稿確認, 校閲スケジュール, 等

<執筆担当については下記の通り>

・理論編

章番号	項目	執筆担当（敬称略）
1	FLIP 開発の経緯と研究会の歴史*注1)	一井
2	FLIP の理論	-
2-1	支配方程式	上田
2-2	構成則	小堤
補遺	補遺*	溜（一部，小堤）注2)
2-3	構成側の改良	小堤
2-4	解析アルゴリズム	-
2-4-1	改良型非線形反復計算法	小堤
2-4-2	簡易大変形解析	小堤
2-4-3	SRI 法	一井
2-4-4	時間積分法の感度解析について	一井
2-4-5	収束判定の影響の感度解析について	一井
3	解析条件設定	-
3-1	レーレー減衰	一井
3-2	境界条件	大矢
4	種々の要素	-
4-1~ 4-10	種々の要素	田代
4-11	杭地盤相互作用ばね	小堤
5	プログラム改良と解析精度*	一井 三上
6	FLIP による 3 次元解析	-
6-1	3 次元の構成則	上田
6-2	3 次元 FLIP のプログラムの概要	溜
6-3	3 次元モデルの作成について（杭基礎を対象として）	溜
6-4	FLIP3D が示す液状化特性について	溜

注 1) \*については，FLIP 研究会以外の検討内容を含む

注 2) 補遺の担当は下記の通り

溜（補遺 2-1,2-2,2-4,2-5,2-7,2-8），小堤（補遺 2-3,2-6,2-7 の計算手順）

・事例編

章番号	項目	執筆担当（敬称略）
1	FLIP 解析と耐震性能設計*	一井
2	解析手順とパラメータ設定	-
2-1	土質調査と土層分割*	一井 三上
2-2	要素シミュレーション*	一井 三上
2-3	Steady State	-
2-3-1	Steady State の重要性	中原
2-3-2	アレー観測記録による検討例	一井
2-4	簡易設定法	池野
2-5	各種材料のモデル化	-
2-5-1	基礎捨石，裏込め石	一井
2-5-2	グラベルドレーン	一井
2-5-3	SCP 改良地盤の検討(粘性土地盤への改良)*	木下
2-5-4	SCP 改良地盤の検討(砂質地盤への改良)	木下
3	各種解析事例	-
3-1	重力式岸壁	一井
3-2	防波堤	吉澤
3-3	矢板式岸壁	-
3-3-1	控え直杭式	北出
3-3-2	控え斜杭式*	村上
3-3-3	自立式	一井
3-3-4	二重矢板式	一井
3-4	直杭式横栈橋*	塩崎
3-5	杭基礎のモデル化方法の検討	-
3-5-1~ 3-5-3	杭基礎のモデル化方法の検討	兵頭
3-5-4	剥離の検討事例*	井合
3-5-5~ 3-5-7	杭基礎のモデル化方法の検討	兵頭
3-6	盛土	中原
3-7	高盛土（非液状化地盤）*	秦
3-8	地下構造物および地下埋設物	-
3-8-1	地下構造物*	溜
3-8-2	埋設管の浮き上がり	一井

3-8-3	飽和砂地盤に埋設された剛基盤上の地下構造物*	井合
3-9	コンテナクレーンの検討*	富安 国生
3-10	三次元解析	-
3-10-1	杭の三次元解析	藤井
3-10-2	空港盛土*	秦
4	よくある問題点と解決策	一井 田代 小堤

注1) \*については、FLIP 研究会以外の検討内容を含む

## 目 次 (理論編)

1. FLIP 開発の経緯と研究会の歴史.....	1-1
1-1 FLIP 開発当時の背景* .....	1-1
1-2 FLIP プログラムの変遷と歴史 .....	1-4
1-2-1 FLIPver3.3 の公開まで.....	1-4
1-2-2 FLIP 研究会におけるバージョンアップ .....	1-6
1-2-3 カクテルグラスモデル要素 .....	1-7
1-3 FLIP 研究会の活動について .....	1-8
1-3-1 プログラム改良と会員サポート .....	1-8
1-3-2 WG 活動 .....	1-9
1-3-3 発表論文.....	1-10
< 1 章の参考文献 > .....	1-17
2. FLIP の理論.....	2-1-1
2-1 支配方程式.....	2-1-1
2-1-1 支配方程式の定式化 .....	2-1-1
2-1-2 解析手順の概要(非排水解析).....	2-1-8
2-1-3 多段階解析(築堤解析) .....	2-1-13
< 2-2 の参考文献 > .....	2-1-21
2-2 構成則 .....	2-2-1
2-2-1 概要.....	2-2-1
2-2-2 多重せん断機構に基づく砂の力学モデル.....	2-2-4
< 2-2 の参考文献 > .....	2-2-21
補遺* .....	2-2-22
2-3 構成側の改良 .....	2-3-1
2-3-1 軸差応力下での繰返しせん断挙動に対する適用性.....	2-3-1
2-3-2 軸差応力下での従来モデルの挙動 (続き) と修正モデル II (tmp7 法) ...	2-3-10
2-3-3 過剰間隙水圧モデルにおける応力経路の修正 (Sus 法) .....	2-3-22
< 2-3 の参考文献 > .....	2-3-31
2-4 解析アルゴリズム .....	2-4-1
2-4-1 改良型非線形反復計算法 .....	2-4-1
2-4-2 簡易大変形解析 .....	2-4-33
< 2-4-1 と 2-4-2 の参考文献 > .....	2-4-42
2-4-3 SRI 法 .....	2-4-43

2-4-4	時間積分法の感度解析について .....	2-4-46
2-4-5	収束判定の影響の感度解析について .....	2-4-49
3.	解析における条件設定 .....	3-1
3-1	レーレー減衰 .....	3-1
3-1-1	$\beta$ の設定法 .....	3-1
3-1-2	個別減衰. とくにジョイント要素に及ぼす影響 .....	3-5
3-2	境界条件 .....	3-8
3-2-1	境界条件の設定 .....	3-8
3-2-2	基盤面の設定 .....	3-12
	< 3章の参考文献 > .....	3-12
4.	種々の要素 .....	4-1
4-1	線形はり要素 .....	4-2
4-2	線形平面要素 .....	4-13
4-3	線形ばね要素 .....	4-14
4-4	非線形はり要素 .....	4-15
4-5	非線形ばね要素 .....	4-18
4-6	ジョイント要素 .....	4-22
4-7	流体要素と流体 - 構造連成面要素 .....	4-29
4-8	粘性要素 .....	4-31
4-9	節点集中質量要素 .....	4-33
4-10	利用者定義非線形はり要素 .....	4-34
	< 4-1~4-10 の参考文献 > .....	4-36
4-11	杭 - 地盤相互作用ばね要素 .....	4-37
4-11-1	概要 .....	4-37
4-11-2	杭 - 地盤系の 3 次元的挙動の分析 .....	4-37
4-11-3	杭 - 地盤相互作用ばねによる 3 次元的挙動のモデル化 .....	4-49
	< 4-11 の参考文献 > .....	4-68
5.	プログラム改良と解析精度 .....	5-1
5-1	解析精度向上 WG の検討 .....	5-2
5-2	解析精度と解析結果の解釈* .....	5-10
	< 5章の参考文献 > .....	5-16

6. FLIP による 3次元解析 .....	6-1-1
6-1 3次元の構成側 .....	6-1-1
6-1-1 積分形の構成式(応力とひずみの直接的な関係式) .....	6-1-1
6-1-2 増分形の構成式 .....	6-1-5
6-1-3 仮想単純せん断応力の定式化 .....	6-1-7
6-1-4 三軸せん断における仮想単純せん断機構 .....	6-1-8
6-1-5 単純せん断における仮想単純せん断機構 .....	6-1-10
6-1-6 破壊基準 .....	6-1-12
6-1-7 ダイレイタンシーの定式化 .....	6-1-16
<6-1 の参考文献> .....	6-1-18
6-2 3次元 FLIP のプログラムの概要 .....	6-2-1
6-2-1 FLIP3D のバージョンについて .....	6-2-1
6-2-2 機能概要 .....	6-2-2
6-2-3 座標系・要素種類系 .....	6-2-3
6-2-4 3次元マルチスプリング要素の構成則 .....	6-2-5
6-3 3次元モデルの作成について（杭基礎を対象として） .....	6-3-1
6-3-1 はじめに .....	6-3-1
6-3-2 水平断面におけるメッシュの粗さに関する検討 .....	6-3-1
6-3-3 杭の 3次元モデル .....	6-3-12
6-3-4 水平断面の 3次元化の実施例（プログラム：FLIPMESH） .....	6-3-14
6-4 FLI3D が示す液状化特性について .....	6-4-1
6-4-1 はじめに .....	6-4-1
6-4-2 解析定数 .....	6-4-1
6-4-3 液状化試験 1（2次元解析と 3次元解析の対比） .....	6-4-2
6-4-4 液状化試験 2（ $K_0$ を変化させた要素シミュレーション） .....	6-4-6
6-4-5 非液状化試験（単調載荷の 2次元解析と 3次元解析の対比） .....	6-4-10
6-4-6 結論 .....	6-4-12
<6-2～6-4 の参考文献> .....	6-4-14

注) \*は、FLIP 研究会以外の検討内容を含むものである。

## 1. FLIP 開発の経緯と研究会の歴史

### 1-1 FLIP 開発当時の背景\*

FLIP は、1988 年に運輸省港湾技術研究所において開発された平面歪状態を対象とする有効応力法に基づく二次元地震応答解析プログラムである。有効応力法に基づく地震応答解析プログラムは、それまでは研究開発途上にあつて、特に、液状化現象のような一種の地盤破壊現象を数値的に安定して解くことが難しかった。そして、実務においてもっとも用いられていた地震応答解析のプログラムは、FLUSH およびその一次元版である SHAKE である。

FLUSH は、Lysmer(1975)らが、原子力発電所の建屋—地盤相互作用を考慮した地震応答解析を行うために開発したプログラムである<sup>1)</sup>。これは、平面歪状態を解析対象とし、周波数領域で運動方程式を解く、全応力法に基づく二次元の有限要素法プログラムである。このとき、土の通常の非線形性（ひずみの増大に伴うせん断剛性の低下等）は等価線形化法により取り扱う。等価線形化法とは、非線形と等価な解が得られるような線形の解析法であり、要は、想定されるひずみのレベルに応じた剛性や減衰を用いて線形の解析を行う方法である。ただし、ここで想定すべきひずみのレベルについては、繰り返し計算により算定する。参考までに、等価線形化法による解析手順の概要を以下の①～④に示す。

- ① 暫定的なせん断剛性、減衰定数を用いて地震応答解析（線形解析）を行う。
- ② 解析での各要素の最大せん断ひずみに応じて、当該要素のせん断剛性等を決め直す。
- ③ 決め直したせん断剛性等に基づき、再度地震応答解析（線形解析）を実行する。
- ④ 上記②③をせん断剛性および減衰定数が収束するまで繰り返す。

一般に等価線形化法の解析手順における収束性はよく、数回の繰り返し計算で、想定すべきひずみレベルを算定できる。ただし、「各要素の最大せん断ひずみに応じて」という点は注意すべき点であり、最大せん断ひずみ発生時刻の際のせん断剛性や減衰を用いるわけではない。解析時間全域にわたり、平均的と考えられるせん断ひずみの値を、最大せん断ひずみから設定する。

SHAKE<sup>2)</sup>は、水平成層地盤を解析対象とし、重複反射理論に基づき周波数領域で運動方程式を解き、地盤の非線形性は等価線形化法により取り扱う。この意味で SHAKE は FLUSH の一次元版であると考えてよい。

いずれにせよ、これらの解析は、（非線形を考慮できる）線形の解析法である。線形の解析であるから、各周波数成分の影響を重ね合わせることができ、周波数領域での解析も可能となっている。また、応力—ひずみ関係が線形であるため、除荷時にはひずみが原則的には 0 となる。もちろん、減衰力の効果により、一時的に 0 とならないこともあるが、十分時間が経過した後は、0 となる。したがって、残留変形を評価することは、原理的に不可能である。

しかし、当時の耐震設計は、震度法で代表されるように、地震による慣性力を含めた状

態での力の釣り合いを考え、荷重と強度（あるいは外力と耐力）の比を安全率で考慮する方法が主流であった。すなわち、地震による慣性力を検討するために動的解析が用いられており、（多くの場合は地表面における）地震動の最大値（特に加速度の最大値）が評価できれば十分であった。

地盤を対象とした耐震設計の場合は、必ずしも地表面の最大加速度だけで十分なわけではない。しかし、たとえば地盤の液状化といった問題であっても、地中の加速度分布（ひずみ分布）として外力を評価し、液状化強度との比較によって、液状化の発生の有無を予測することが設計の手順であった。このため、残留変形を評価することが原理的に不可能な解析手法であっても、大きな問題とはならなかった。

なお、FLUSH や SHAKE は、もともと液状化解析のために作られたプログラムではないので、液状化による地盤の剛性低下を考慮した解析はできない。また、液状化による地盤の変形や矢板等の部材断面力の増大は、主に、重力が作用している状態での地盤のせん断剛性の低下に起因するが、これらのプログラムにおいて考慮できる荷重は地震力のみで重力は直接には取り扱うことができない。なお、これらの FLUSH や SHAKE で考慮できない項目を FLIP と比較したものを表 1-1-1 に示す。このように、多くの項目を取り扱うことができないにもかかわらず、実務で長く用いられてきた理由は、直接的に実現象と直接的に解析結果を比較するわけではなく、外力評価の一部としての設計ツールであったからといえる。

以上をまとめると、FLIP 開発当時の設計体系では、外力と耐力の比によって設計を検討するため、外力評価の手段として動的解析が位置付けられていた。このとき、（非線形を考慮はできるものの、原理的には）線形の解析手法を適用していることもあり、実現象との整合性は、ある程度あきらめられていたといえる。ただし、設計体系としての考慮から、動的解析を用いて算定した外力と、実際の施設の耐力が、被災や無被災事例を説明できるかどうかについては検討されていた。

一方で、有限要素法の普及、計算機の発達により、単なる設計ツールとしての動的解析ではなく、より実際の現象を精度よく再現できる解析手法もほしいという声は（たぶん）あったものと思われる。FLIP は、それらの要望にこたえる意味で、（ある意味では設計ツールというより実現象をよく再現できる研究上のツールとして）登場してきたと思われる。

\*本稿の内容は FLIP 研究会の公式見解ではなく、この機会に執筆した一つの見解である。

人により、意見の異なる場合もあるので注意されたい。

表 1-1-1 解析手法別の評価可能項目<sup>3)</sup>

検討項目 条件		解析手法		
		SHAKE	FLUSH	FLIP
		一次元	二次元	二次元
		全応力法 等価線形	全応力法 等価線形	有効応力法 非線形
液状化する可能性 がある場合	液状化判定	○	○	○
	残留変形	×	×	○
	最大変位	×	×	○
	部材断面力(残留値)	×	×	○
液状化しない場合 (液状化しないよう 対策した場合)	部材断面力(時間最大値)	×	×	○
	残留変形	×	×	○
	最大変位(地震力による)	○	○	○
	部材断面力(残留値)	×	×	○
備考	部材断面力(時間最大値)	×	○	○
		水平成層 地盤にのみ 適用可能		

## 1-2 FLIP プログラムの変遷と歴史

以下、FLIP プログラムの変遷と歴史を簡単に述べる。

### 1-2-1 FLIPver3.3 の公開まで

有効応力法に基づく地震応答解析プログラムでは、特に、液状化現象のような一種の地盤破壊現象を数値的に安定して解くことが難しい点が問題であった。この問題を解決し、安定的に実施できるモデルが井合(1988)<sup>4)</sup>により提案され、その考え方にに基づきプログラム FLIP が開発された。

FLIP のモデルは、1990 年の港湾空港技術研究所報告<sup>5),6)</sup>および 1992 年の Soils and Foundations<sup>7),8)</sup>に記されている。このときすでに、FLIP(Finite element analysis of LIquefaction Program)の名前がプログラム名として記されている。

その後、兵庫県南部地震の被災事例の解析に至るまで、FLIP を用いた種々の解析が試みられてきた。主なものとしては、土質工学会の一斉解析(1989)<sup>9)</sup>、遠心実験によるブラインド解析プロジェクトへの参加(VELACS)<sup>10)-13)</sup>、地中埋設管の浮き上がり<sup>14)</sup>、日本海中部地震における矢板式岸壁の被災・無被災事例<sup>15)</sup>、液状化対策範囲の検討<sup>16)</sup>、釧路沖地震における鉛直アレー地震観測記録の解析<sup>17)</sup>などである。

特に、各種の有効応力モデルを用いた「液状化に関する一斉計算」<sup>9)</sup>において、特に基本的な要素試験シミュレーションの比較で、FLIP は液状化がかなり進行して歪が  $10^{-2}$  のレベルになるまで安定してシミュレーションでき、また、液状化抵抗曲線へのフィッティングもよいことが確認されている。

1995 年の兵庫県南部地震においては、神戸港のケーソン式岸壁<sup>18)</sup>、ニューマチックケーソン橋梁基礎<sup>19)</sup>等の被災の再現解析にも成功した。また、兵庫県南部地震以降の経験を踏まえ、耐震強化岸壁に対しては、震度法による耐震設計だけではなく、変形照査が実施されることとなった。この時の照査手法として、兵庫県南部地震における被災を適切に再現できた FLIP が有力な手法の一つとして認識された。

そして、当時のバージョンである FLIPver3.3 が財団法人沿岸開発技術研究センターより公開（有償）されると同時に、バージョンアップおよび高度利用技術の検討のための FLIP 研究会が発足した。ちなみに、第 1 期 FLIP 研究会の第 1 回会合は平成 9 年 6 月 10 日である。

## 1-2-2 FLIP 研究会におけるバージョンアップ

FLIP 研究会では、バグ対応のほか、プログラムのバージョンアップもつぎつぎと行われた。以下に主な改訂履歴を示す。基本的には上位互換の思想で改良されており、上位のバージョンのプログラムによっても下位のバージョンと同等の結果が得られるはずであるが、解析アルゴリズムの修正やデータカードの記述方法の変更により、以前と異なる結果が得られたり、同じデータカードでは計算できない場合もあつたりするので、注意が必要である。これらの各バージョンにおける改良点や使用上の注意は、取り扱い説明書に詳細に記述されている。

なお、平成 18 年の港湾基準の改訂により、FLIP を実務で使用するケースが増加することを受け、より多くの方が新しいバージョンの FLIP を用いることができるように、FLIPver606 が公開された。この FLIPver606 は、研究会内で更新されてきたプログラムに対して、公開用に機能等を整理したバージョンである。

- ・ FLIP 3.5 版

SRI (Selective Reduced Integration) 法の導入。

- ・ FLIP 4.1 版

マルチスプリング要素 AA・BB 自動算定機能の導入 (=解析の安定化)。

- ・ FLIP 4.2 版

非線形はり要素・非線形ばね要素導入。

簡易築堤解析機能 (2 段階まで) の導入。

- ・ FLIP 4.2.5 版

多段階解析機能の導入 (簡易築堤解析機能は廃止)。

- ・ FLIP 4.2.7 版

C -  $\phi$  f 同時指定機能の整備。

- ・ FLIP 4.2.8~4.2.9 版

非線形はり要素・非線形ばね要素改良。

- ・ FLIP 4.3 版

側方境界の改良 (以前の版と応答が異なる場合がある)

- ・ FLIP 4.4 版

簡易大変形解析機能の追加

1 次元解析機能の追加

- ・ FLIP 5.0 版

非線形反復計算法の改善。

変相線を超えた領域での塑性せん断仕事の負のダイレタンシーへの寄与を見直したアルゴリズム (tmp3 法) を導入。

- ・ FLIP 5.1 版

杭－地盤相互作用ばね要素の導入

- ・ FLIP5.1.6 版

側方粘性境界の再改良（未だ改良の余地はある）

- ・ FLIP6.0 版

杭－地盤相互作用ばね要素の改良

斜杭の取扱いを可能に（検証不十分）

解析フェーズ間での状態受け渡し

- ・ FLIP6.0 版（続き）

変相線を超えた領域での塑性せん断仕事の負のダイランシーへの寄与を見

直したアルゴリズム（tmp7 法）を導入.

MicroAVS による描画に対応

粘性土の粘着力等の座標依存形式入力

- ・ FLIP6.1.7 版

過剰間隙水圧モデルの応力経路を修正して、応力一定でひずみが生じる状態

（Steady State）を表現可能にした（Sc 法）.（※後に、FLIP7.1.3 で Sus 法に変更）

- ・ FLIP7.1.3 版

鋼材の強制変位解析機能の導入

ファイルオープン機能の導入（64bit 機等）

マルチスプリング要素への Sus 法の導入

カクテルグラスモデル要素の導入（検証中）

透水解析機能の導入（検証中）

- ・ FLIP7.1.6～7.1.9-6-7 版

カクテルグラスモデル要素改良（検証中）

利用者定義要素（非線形はり要素）の組み込み可能化

非対称修正武田モデル要素の導入（利用者定義要素として作成）

間隙水要素（排水条件）の新設

- ・ FLIP7.1.9-8-6～7.2.2 版

カクテルグラスモデル要素の改良（検証中）

間隙水要素（排水条件）の改良

リスタート機能（INITSW=1 の場合）の改良

- ・ FLIP3D 1.0.0～FLIP3D 1.3.5 版

3次元解析機能

### 1-2-3 カクテルグラスモデル要素と透水解析機能の導入

前述のように、開発当時の FLIP は、1990 年の港湾空港技術研究所報告<sup>5),6)</sup>および 1992 年の *Soils and Foundations*<sup>7),8)</sup>に記されているモデルを用いている。この FLIP に組み込まれたこのモデルはマルチスプリング要素とよばれ、安定性に優れたモデルである。しかし、構成則における液状化の進行のモデル化（液状化フロントの進展）において、非排水条件での解析が前提であり、地盤内の間隙水の移動に伴う地盤挙動の評価等は不可能であった。また、解析プログラム自体においても、間隙水の収支バランス式を解く機能を有していなかった。

この問題に対し、まず、第 3 期 FLIP 研究会において、透水解析機能が導入された。このことにより、間隙水の収支バランス式を単独で解いて、定常／非定常の浸透流解析を行うことが可能となった。また、運動方程式と間隙水の収支バランス式を連成させて解くことも可能となった。

さらに、京都大学井合教授が考案した新たな構成則<sup>20)</sup>（カクテルグラスモデル）が導入され、間隙水の移動に伴う地盤挙動の変化等も解析上考慮できることとなった。このカクテルグラスモデル要素を用いた検討は第 4 期 FLIP 研究会より実施され、第 4 期 FLIP 研究会終了時点では、概ね被災・無被災事例を再現できることが示されている。

カクテルグラスモデルは、すでに実務で使用可能な水準にも達しているものの、パラメータの妥当な設定方法など、普及にあたっての多くの課題も残されている。これらの課題については、平成 23 年に発足した FLIP コンソーシアムにおける検討でも継続されていくものと想定される。そこで、本資料では、カクテルグラスモデルに関する FLIP 研究会の活動は割愛し、従来のマルチスプリングモデルを対象とした活動成果のみを取りまとめている。

### 1-3 FLIP 研究会の活動について

FLIP 研究会は、第 1 期 FLIP 研究会(平成 9~12 年)から第 4 期 FLIP 研究会 (平成 19~22 年) まで、計 4 期の活動を実施している。それぞれの期において、活動体制には若干の違いがあるもの、それらの組織図を取りまとめても意味がないので、本稿では割愛する。

FLIP 研究会では、その期間を通じて、以下のような活動が実施されてきた。これらの活動内容は、今後の種々のプログラム開発等においても、さらには FLIP コンソーシアムにおける活動においても参考になる部分が多いと思われる。

#### 1-3-1 プログラム改良と会員サポート

プログラム改良は、前述のように、継続的に実施されてきた。これは、会員各位からの会費を充当して実施されたものである。なお、このことにより、途中から新規入会された会員の方が最新版のプログラムを利用できると、プログラムの改良にかかった経費を負担せずに利用できることになり、やや具合が悪い。以上の観点から、会期中からの新規入会の方には、一定時点までさかのぼって会費を納入する「さかのぼり会費」のシステムが課せられてきた。

FLIP に関しては、本体のプログラム改良だけではなく、関連プログラムの提供も実施されてきた。関連プログラムの主なものとしては、以下のものがある。

- ・ FLIPGEN : FLIP 用入力データ作成ツール
- ・ FLIPSIM : 液状化パラメータ設定用ツール (要素解析実行補助ツール)
- ・ FLIPHIST : 解析終了後における時刻歴データ抽出ツール
- ・ FLIPSECT : 解析終了後における時間断面データ出力ツール
- ・ FLIPMESH : 3次元メッシュ作成補助ツール
- ・ flip2Dtomavs : 解析結果を MicoroAvs で図化する際の変換ツール
- ・ flip3dtomavs : 同上 (3次元解析用)

また、プログラムの使用法についての疑問等については、公開されている FLIPver3.3 (および FLIPver606) と同様に、FAX アンサーサービスが用意された。なお、実際には、途中から FAX ではなく E-Mail での問い合わせとなっている。

### 1-3-2 WG 活動

FLIP 研究会では、FLIP の高度利用技術に関する検討にも、継続的に取り組んできた。各期の WG での検討内容を下記に記す。なお、これらの検討内容の選択に当たっては、研究会会員へのアンケートを実施し、プログラム改良の進捗に応じつつ、要望の多いものを優先的に実施している。また、各 WG の検討成果は、報告書を作成すると同時に、各年度の総会において会員に報告されている。ただし、WG での検討において、「FLIP 研究会内での使用に限る」という条件で、実験データ等を借用している場合があり、各 WG の報告書は、(研究会初期の WG 報告書を除き) 原則的には研究会内に限定された資料であることに留意されたい。

#### < 第 1 期 FLIP 研究会 >

- ・ 釧路港 1 次元地盤モデルによる感度解析
- ・ 六甲アイランド RF3 岸壁の被災断面による FLIP の各種パラメータの感度解析
- ・ SCP 改良地盤のモデル化に関する検討
- ・ 盛土構造物のモデル化に関する検討
- ・ 矢板式護岸のモデル化に関する検討
- ・ 捨石のモデル化に関する検討
- ・ 盛土構造物のモデル化に関する検討 (その 2)
- ・ 構成則に関する検討

#### < 第 2 期 FLIP 研究会 >

- ・ グラベルドレーンのモデル化に関する検討
- ・ 杭基礎のモデル化に関する検討
- ・ 地中埋設管の浮き上がりに関する検討
- ・ 解析精度の向上に関する検討

#### < 第 3 期 FLIP 研究会 >

- ・ せん断変形ロック問題に関する検討
- ・ 3 次元解析機能に関する検討

#### < 第 4 期 FLIP 研究会 >

- ・ せん断変形ロック問題に関する検討
- ・ 透水解析機能に関する検討
- ・ Steady state に関する検討

### 1-3-3 発表論文

各WGでの検討成果は、報告書に取りまとめるだけではなく、積極的に学会発表を実施してきた。以下に発表論文のリストを示す。

#### <第1期FLIP研究会>

- 1) 小堤治, 井合進, 岡由剛: 1次元有効応力解析のパラメタ感度解析, 第25回地震工学研究発表会講演論文集, pp.337-340, 1999.07
- 2) 岡由剛, 井合進, 小堤治: 2次元有効応力解析のパラメタ感度解析(その1), 第25回地震工学研究発表会講演論文集, pp.341-344, 1999.07
- 3) 井合進, 小堤治, 岡由剛: 2次元有効応力解析のパラメタ感度解析(その2), 第25回地震工学研究発表会講演論文集, pp.345-348, 1999.07
- 4) 野津光夫, 小堤治, 溜幸生, 川満逸雄, 井合進, 森浩章: SCPで改良された砂質地盤の地震時有効応力解析におけるモデル化, 第35回地盤工学研究発表会講演集, pp.2417-2418, 2000.06
- 5) 三輪滋, 小堤治, 安田進, 森浩章: SCP改良地盤の地震時挙動の評価におけるモデル化に関する問題点の整理, 第35回地盤工学研究発表会講演集, pp.2419-2420, 2000.06
- 6) 原幸司, 足立雅樹, 三輪滋, 野津光夫, 八嶋厚, 森浩章: 有効応力解析によるSCP改良地盤の事例にもとづくモデル化の検討(その1: 西宮浜におけるSCP改良地盤の検討), 第35回地盤工学研究発表会講演集, pp.2397-2398, 2000.06
- 7) 石倉克真, 佐藤靖彦, 大塚夏彦, 大竹省吾, 池田隆明, 井合進, 森浩章: 有効応力解析によるSCP改良地盤の事例にもとづくモデル化の検討(その2: 六甲アイランドにおけるSCP改良地盤の検討), 第35回地盤工学研究発表会講演集, pp.2399-2340, 2000.06
- 8) 杉山弥, 井合進, 小堤治, 森浩章, 野津光夫, SCPで改良された粘性土地盤上の重力式岸壁の地震時有効応力解析(その1: 高置換率SCP改良地盤のモデル化), 第35回地盤工学研究発表会講演集, pp.2055-2056, 2000.06
- 9) 佐藤成, 吉田晃, 飯田典生, 丹下秀雄, 井合進, 森浩章: SCPで改良された粘性土地盤上の重力式岸壁の地震時有効応力解析(その2: ケーススタディー), 第35回地盤工学研究発表会講演集, pp.2057-2058, 2000.06
- 10) 井合進, 龍田昌毅, 小堤治, 溜幸生, 山本裕司: 地盤の初期応力条件が矢板式岸壁の地震時挙動に与える影響の解析的検討, 第26回地震工学研究発表会講演論文集, pp.809-812, 2001.08
- 11) 中山裕章, 酒井久和, 金子浩士, 足立雅樹, 森浩章: FLIPによる矢板式岸壁の耐震性評価について, 第26回地震工学研究発表会講演論文集, pp.817-820, 2001.08
- 12) 岡由剛, 三輪滋, 石倉克真, 平岡慎司, 松田栄一: 鋼矢板岸壁の被災事例による有効応力解析における初期応力状態のモデル化手法の検証, 第26回地震工学研究発表会講演

論文集, pp.813-816, 2001.08

- 13) 佐藤成, 大竹省吾, 亀山和弘, 佐藤靖彦, 飯田典生, 大塚夏彦, 森浩章, 小堤治, 井合進, 安田進: 非排水有効応力地震応答解析における捨石材のモデル化に関する検討 (その 1), 第 26 回地震工学研究発表会講演論文集, pp.677-680, 2001.08
- 14) 佐藤成, 林家祥, 亀山和弘, 佐藤靖彦, 飯田典生, 大塚夏彦, 森浩章, 小堤治, 井合進, 安田進: 非排水有効応力地震応答解析における捨石材のモデル化に関する検討 (その 2), 第 26 回地震工学研究発表会講演論文集, pp.681-684, 2001.08
- 15) Miwa, S., Nozu, M., Ozutsumi, O., Iai, S., Yashima, A., Yasuda, S.: Effective Stress Analysis for Evaluating the Effect of the Sand Compaction Pile Method during the 1995 Hyogoken-Nambu Earthquake", Proceedings of 4th International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics, 2001.03
- 16) Shimazu, T., Sato, S., Ikeda, T., Ozutsumi, O. and Iai, S.: Analytical study of shaking table tests on effect of steel sheet pile walls for embankments: Analysis by "FLIP", Proc. of the 10th international conference on soil dynamics and earthquake engineering (extended abstract), 2001.10
- 17) 龍田昌毅, 井合進, 小堤治, 溜幸生, 山本祐司, 酒井久和, 足立雅樹, 金子浩士, 森浩章: 有効応力解析プログラム「FLIP」による地盤の初期応力条件を考慮した矢板式岸壁の地震応答解析, 第 46 回地盤工学シンポジウム平成 13 年度論文集, pp.13-18, 2001.11
- 18) 三輪滋, 岡由剛, 中山裕章, 石倉克真, 平岡慎司, 松田英一, 吉田晃, 井合進, 小堤治, 森浩章: 初期応力状態を考慮したモデル化による鋼矢板岸壁の被災事例の有効応力解析, 第 46 回地盤工学シンポジウム平成 13 年度論文集, pp.19-24, 2001.11
- 19) 佐藤成, 亀山和弘, 大塚夏彦, 森浩章, 小堤治, 井合進, 安田進: 非排水有効応力地震応答解析における捨石材のモデル化に関する検討, 第 46 回地盤工学シンポジウム平成 13 年度論文集, pp.25-30, 2001.11
- 20) 小堤治, 井合進, 島津多賀夫, 三輪滋, 中山裕章, 溜幸生, 沢田俊一, 竹島康人, 森浩章: 変相線を超えた応力空間における塑性せん断仕事の負のダイランシーへの寄与について, 第 46 回地盤工学シンポジウム平成 13 年度論文集, pp.83-88, 2001.11

<第2期 FLIP 研究会>

- 1) 竹島康人, 澤田俊一, 小堤治, 井合進, 池田隆明, 佐藤誠一, 梅木康之: 非排水有効応力解析によるドレーン改良地盤のモデル化に関する検討(その1)モデル化の方法と大型振動台実験の検証解析, 第38回地盤工学研究発表会, 2003.
- 2) 池田隆明, 小堤治, 井合進, 澤田俊一, 竹島康人, 梅木康之: 非排水有効応力解析によるドレーン工法改良地盤のモデル化に関する検討(その2)入力地震波の振動数とレベルの影響, 第38回地盤工学研究発表会, 2003.
- 3) 足立雅樹, 小堤治, 井合進, 吉田晃, 塚峰, 大塚夏彦, 田河祥一: 非排水有効応力解析によるドレーン工法改良地盤のモデル化に関する検討(その3)ドレーン材の剛性の影響, 第38回地盤工学研究発表会, 2003.
- 4) Y. Takeshima, S. Sawada, S. Iai, K. Ichii, O. Ozutsumi, M. Adachi, A. Yoshida, T. Ikeda, N. Ootsuka, Y. Umeki: Modeling of drainage behavior for dynamic effective stress analysis by undrained condition, Proc. of 13th World Conference on Earthquake Engineering, 2004.
- 5) 溜幸生, 小出紀子, 小堤治, 岡由剛, 井合進, 梅木康之: 飽和土中の埋設管の地盤反力に関する2次元平面ひずみ解析, 第38回地盤工学研究発表会, 2003.
- 6) 三輪滋, 小堤治, 溜幸生, 岡由剛, 一井康二, 井合進, 田河祥一: 2次元水平断面モデルを用いた液状化地盤における杭-地盤系の相互作用の検討, 第38回地盤工学研究発表会, 2003.
- 7) 小堤治, 溜幸生, 岡由剛, 一井康二, 井合進, 梅木康之: 2次元有効応力解析における杭と液状化地盤の相互作用のモデル化, 第38回地盤工学研究発表会, 2003.
- 8) 小堤治, 溜幸生, 岡由剛, 井合進, 梅木康之: 2次元有効応力解析における杭と液状化地盤の動的相互作用のモデル化, 第58回土木学会年次学術講演会, 2003.
- 9) 川中政美, 安藤崇男, 溜幸生, 井合進, 田河祥一: 土の構成則に関連する相互作用ばねを用いた単杭の水平載荷実験の2次元有限要素解析, 一砂質地盤一, 第58回土木学会年次学術講演会, 2003.
- 10) 吉川茂樹, 曲伝軍, 溜幸生, 井合進, 梅木康之: 土の構成則に関連する相互作用ばねを用いた単杭の水平載荷実験の2次元有限要素解析, 一粘性地盤一, 第58回土木学会年次学術講演会, 2003.
- 11) 小竹望, 溜幸生, 小堤治, 井合進, 田河祥一: 土の構成則に関連する相互作用ばねを用いた単杭の水平載荷実験の2次元有限要素解析, 一地表面の影響一, 第58回土木学会年次学術講演会, 2003.
- 12) 寿楽和也, 一井康二, 篠崎晴彦, 井合進, 田河祥一: 2次元解析における杭-地盤相互作用ばねを用いた群杭効果の評価手法の検討, 第58回土木学会年次学術講演会, 2003.,
- 13) 河又洋介, 一井康二, 竹島康人, 井合進, 梅木康之: 杭-地盤相互作用ばねを組み込んだ2次元解析によるスタナミック水平載荷実験のシミュレーション, 第58回土木学会

年次学術講演会, 2003.

- 14) 岡由剛, 佐藤靖彦, 河辺知之, 塩崎禎郎, 井合進, 梅木康之: 杭近傍地盤の応力-歪関係に依存する相互作用ばねを用いた杭基礎の2次元有効応力解析, 第58回土木学会年次学術講演会, 2003.
- 15) K. Kitade, Y. Kawamata, K. Ichii, S. Iai: Analysis of laterally loaded pile groups using 2-D FEM, Proc. of ICSDEE & ICEGE Conference, 2004.
- 16) 佐藤成, 一井康二, 西山誠治, 大島貴充, 井上陽介, 佐藤誠一, 池田隆明, 荒木繁雄, 兵頭武志, 梅木康之, 井合進: FLIPによる地中埋設管浮上実験の予測解析, 第48地盤工学シンポジウム論文集, 2003.,
- 17) 小堤治, 山本裕司, 足立雅樹, 関谷千尋, 川中政実, 北出圭介, 土屋智穂, 島津多賀夫, 井合進, 田河祥一: 地中埋設管浮上実験の有効応力法による実験解析に基づく浮上メカニズムの検討, 第48地盤工学シンポジウム論文集, 2003.,
- 18) 塩崎禎郎, 小堤治, 兵頭武志, 住谷圭一, 関谷千尋, 足立雅樹, 井合進, 一井康二, 森玄: 二次元有効応力解析法の解析精度向上に関する検討-矢板式係船岸を対象として-, 第39回地盤工学研究発表会, 2004.
- 19) 森玄, 佐藤成, 小堤治, 一井康二, 塩崎禎郎, 井合進: 二次元有効応力解析法の解析精度向上に関する検討-重力式係船岸を対象として-, 第39回地盤工学研究発表会, 2004.
- 20) 小堤治, 井合進, 西和宏: 二次元有効応力解析法の解析精度向上に関する検討-栈橋式係船岸を対象として-, 第39回地盤工学研究発表会, 2004.
- 21) 小堤治, 塩崎禎郎, 一井康二, 井合進, 森玄: 二次元有効応力解析法の解析精度向上に関する検討, 第29回海洋開発シンポジウム論文集, 2004.7.

<第3期 FLIP 研究会>

- 1) 溜幸生, 小堤治, 井合進, 芥川博昭: 液状化地盤と杭の相互作用を考慮した大型振動台実験の2次元有効応力解析, 第42回地盤工学研究発表会, 平成19年度発表講演集, pp.1665-1666, 2007.
- 2) 鈴木明憲, 小堤治, 井合進, 奈良俊介, 横山伸幸: 砂質土地盤における実物大単杭水平載荷試験の三次元解析, 土木学会第62回年次学術講演会
- 3) 斎藤崇嗣, 田代聡一, 鈴木章浩, 井合進, 芥川博昭: 杭基礎の静的挙動に関する3次元有限要素解析検討, 土木学会第62回年次学術講演会

<第4期 FLIP 研究会>

・透水解析WGおよび透水解析WGIIによるもの

- 1) Tamari, Y., Ozutsumi, O., Iai, S. and Yokoyama, N.: A numerical study on post liquefaction soil behavior by dynamic effective stress analysis, Performance-Based Design in earthquake Geotechnical Engineering, Kokusyo, Tsukamoto & Yoshimine (eds), Taylor & Francis Group, London, 2009.
- 2) Suzuki, S., Ozutsumi, O., Iai, S. and Yokoyama, N.: A study on prediction accuracy of the dissipation of pore water pressure and the settlement of soil surface for an actual case by the dynamic effective stress analysis program, Performance-Based Design in earthquake Geotechnical Engineering, Kokusyo, Tsukamoto & Yoshimine (eds), Taylor & Francis Group, London, 2009.
- 3) 小堤治, 溜幸生, 井合進, 川崎栄久, 鈴木明憲: カクテルグラスモデルの非排水繰り返しせん断時の挙動について, 第45回地盤工学研究発表会, pp.345-346, 2010.
- 4) 鈴木明憲, 小堤治, 井合進, 飛田哲男, 川崎栄久: 透水と体積圧縮を考慮した遠心振動台実験を対象とした検討解析, 第45回地盤工学研究発表会, pp.347-348, 2010.
- 5) 溜幸生, 小堤治, 井合進, 川崎栄久: 不規則荷重を受ける飽和砂の液状化後の体積収縮量に関する有効応力解析, 第45回地盤工学研究発表会, pp.341-342, 2010.
- 6) 田代聡一, 井合進, 川崎栄久: グラベルドレーンの大型模型振動実験を対象とした有効応力解析, 第45回地盤工学研究発表会, pp.1521-1522, 2010.
- 7) 池野勝哉, 井合進, 飛田哲男, 川崎栄久: 透水と体積収縮を考慮した遠心模型実験の解析(密詰め地盤), 第45回地盤工学研究発表会, pp.1547-1548, 2010.
- 8) 北出圭介, 井合進, 関谷千尋, 築地健太郎: 間隙水の移動と液状化に伴う体積圧縮を考慮した係船岸の被災事例解析, 第45回地盤工学研究発表会, pp.1529-1530, 2010.
- 9) 小堤治, 溜幸生, 井合進, 川崎栄久, 鈴木明憲: カクテルグラスモデルにおける杭-地盤相互作用ばねの適用, 土木学会第65回年次学術講演会, pp.623-624, 2010.
- 10) 溜幸生, 小堤治, 井合進, 関谷千尋: 液状化地盤の透水・沈下と動的相互作用を考慮した

2次元動的有効応力解析, 土木学会第65回年次学術講演会, pp.663-664, 2010.

11) 森安俊介, 森島直樹, 井合進, 小堤治, 関谷千尋: FLIP 解析による透水を考慮した矢板式岸壁の耐震性評価, 土木学会第65回年次学術講演会, pp.665-666, 2010.

12) 池野勝哉, 井合進, 関谷千尋: カクテルグラスモデルによる1993年釧路沖地震の一次元地震応答解析, 土木学会第65回年次学術講演会, pp.693-694, 2010.

・せん断変形ロック WG および Steady State WG によるもの

1) 中原知洋, 井合進, 一井康二, 小堤治, 横山伸幸: 砂質土の定常状態を考慮した有効応力解析法について, 第43回地盤工学研究発表会, 平成20年.

2) 小堤治, 井合進, 一井康二, 納見昭広: 砂質土の定常状態を考慮するために行った過剰間隙水圧モデルにおける応力経路の修正, 第43回地盤工学研究発表会, 平成20年.

3) 本島一宏, 井合進, 横山伸幸, 澤田俊一: 砂質土の定常状態に対する細粒分含有率や間隙比などの影響について, 第43回地盤工学研究発表会, 平成20年.

4) 芋野智成, 井合進, 納見昭広, 小堤治: 砂質土の定常状態を考慮した河川堤防の被災事例解析(その1), 第43回地盤工学研究発表会, 平成20年.

5) 川中政美, 井合進, 小堤治, 横山伸幸: 砂質土の定常状態を考慮した河川堤防の無被災事例解析, 第43回地盤工学研究発表会, 平成20年.

6) 中原知洋, 井合進, 小堤治, 納見昭広: 砂質土の定常状態を考慮した河川堤防の被災事例解析(その2), 第43回地盤工学研究発表会, 平成20年.

7) 兵頭順一, 井合進, 横山伸幸, 小堤治, 吉川茂樹: 砂質土の定常状態を考慮した遠心模型実験の有効応力解析, 第43回地盤工学研究発表会, 平成20年.

8) 藤井紀之, 井合進, 納見昭広, 小堤治, 澤田俊一: 砂質土の定常状態を考慮したケーソン式防波堤の被災事例解析, 第43回地盤工学研究発表会, 平成20年.

9) 奈良俊介, 竹信正寛, 井合進, 納見昭広: 砂質土の定常状態を考慮した鉛直アレー観測結果の再現計算, 平成20年, 第43回地盤工学研究発表会, 平成20年.

10) Mikami, T., Ichii, K., Iai, S., Ozutsumi, O., Nakahara, T. and Yokoyama, N.: Modeling of strain increase of liquefied soils in cyclic shear loading considering material characteristics, International Conference on Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering — from case history to practice — (IS-Tokyo'09), June 15 - 18, 2009, Tsukuba, Japan, pp.1395-1402.

11) Fujii, N., Sawada, S., Iai, S., Ichii, K., Yokoyama, N., Ozutsumi, O., Nakahara, T. and Mizuno, K.: Model modification considering steady states for dynamic analysis with effective stress response, International Conference on Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering — from case history to practice — (IS-Tokyo'09), June 15 - 18, 2009, Tsukuba, Japan, pp.1193-1198.

- 12) 中原知洋, 井合進, 一井康二, 小堤治, 関谷千尋: 解析プログラム FLIP における砂の砂粒分を考慮した解析定数簡易設定法, 第 45 回地盤工学研究発表会, 平成 22 年.
- 13) 中原知洋, 井合進, 一井康二, 小堤治, 関谷千尋: 解析プログラム FLIP における砂の解析定数簡易設定法の種類とその特性, 第 46 回地盤工学研究発表会 (投稿中), 平成 23 年.
- 14) 三上武子, 小堤治, 中原知洋, 井合進, 一井康二, 川崎栄久: 液状化解析プログラム FLIP のパラメータの簡易設定法 (再訂版) の構築, 第 46 回地盤工学研究発表会 (投稿中), 平成 23 年.
- 15) 一井康二, 仁科晴貴, 井合進, 中原知洋, 小堤治, 小野寺隆柔: 解析プログラム FLIP における Steady State 時のせん断応力レベルの設定法の検討, 第 46 回地盤工学研究発表会 (投稿中), 平成 23 年.
- 16) 小堤治, 井合進, 一井康二, 荒木繁雄, 三上武子, 曲伝軍, 関谷千尋: 液状化解析プログラム FLIP 入力パラメータの各種簡易設定法の比較, 第 46 回地盤工学研究発表会 (投稿中), 平成 23 年.
- 17) 芋野智成, 井合進, 一井康二, 小野寺隆柔: 解析プログラム FLIP における砂の解析定数簡易設定法の事例解析—河川堤防—, 第 46 回地盤工学研究発表会 (投稿中), 平成 23 年.
- 18) 兵頭順一, 井合進, 一井康二, 小堤治, 川崎栄久, 吉川茂樹: 有効応力解析プログラム FLIP における砂の解析定数簡易設定法を用いた事例解析 (その 2—遠心模型実験—), 第 46 回地盤工学研究発表会 (投稿中), 平成 23 年.
- 19) 佐藤誠一, 井合進, 一井康二, 由井隆粹: 解析プログラム FLIP における砂の解析定数簡易設定法の事例解析—重力式岸壁—, 第 46 回地盤工学研究発表会 (投稿中), 平成 23 年.
- 20) 佐藤茂, 井合進, 一井康二, 由井隆粹: 解析プログラム FLIP における砂の解析定数簡易設定法の事例解析—ケーソン岸壁—, 第 46 回地盤工学研究発表会 (投稿中), 平成 23 年.

< 1 章の参考文献 >

- 1) Lysmer, J., Udaka, T., Tsai, C.F. and Seed, H.B., A computer program for approximate 3-D analysis of soil-structure interaction problem, College of engineering, University of California, 1975.
- 2) I. Schnabel, P. B., Lysmer, J. and Seed, H. B. : SHAKE A computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites, Report No. EERC75-30, University of California, Berkeley, 1975.
- 3) 柴田徹, 井合進, 木山正明, 上菌晃, 鈴木孝幸, 小堤治, 兪杰 : "FL 値による地盤の剛性評価法と構造物被害の予測法 (FLUSH-L 法)", 第 2 回阪神・淡路大震災に関する学術講演会論文集, 1997 年 1 月.
- 4) 井合進 : "液状化の 2 次元有効応力解析において破綻しない為の工夫をした一つのモデル", 土木学会第 43 回年次学術講演会, 3 部, PP.418-419, 昭和 63 年 10 月.
- 5) Iai, S., Matsunaga, Y. and Kameoka, T.: Strain Space Plasticity Model for Cyclic Mobility, *Report of the Port and Harbour Research Institute*, Vol.29, No.4, pp.27-56, 1990.
- 6) Iai, S., Matsunaga, Y. and Kameoka, T.: Parameter Identification for a Cyclic Mobility Model, *Report of the Port and Harbour Research Institute*, Vol.29, No.4, pp.57-83, 1990.
- 7) Iai, S., Matsunaga, Y. and Kameoka, T.: Strain Space Plasticity Model for Cyclic Mobility, *Soils and Foundations*, Vol.32, No.2, pp.1-15, 1992.
- 8) Iai, S., Matsunaga, Y. and Kameoka, T.: Analysis of Undrained Cyclic Behavior of Sand under Anisotropic Consolidation, *Soils and Foundations*, Vol.32, No.2, pp.16-20, 1992.
- 9) 井合進 : FLIP による解析, 地盤と土構造物の地震時の挙動に関するシンポジウム, 土質工学会, pp.94-103.
- 10) Iai, S., Kameoka, T. and Matsunaga, Y.: Numerical (Class A) prediction of Model No.1, Verification of Numerical Procedures for the Analysis of Soil Liquefaction Problems (VELACS), Balkema, pp.109-127.
- 11) Iai, S., Kameoka, T. and Matsunaga, Y.: Numerical (Class A) prediction of Model No.2, Verification of Numerical Procedures for the Analysis of Soil Liquefaction Problems (VELACS), Balkema, pp.369-375.
- 12) Iai, S., Kameoka, T. and Matsunaga, Y.: Numerical (Class A) prediction of Model No.11, Verification of Numerical Procedures for the Analysis of Soil Liquefaction Problems (VELACS), Balkema, pp.939-946.
- 13) Iai, S., Kameoka, T. and Matsunaga, Y.: Numerical (Class A) prediction of Model No.12, Verification of Numerical Procedures for the Analysis of Soil Liquefaction Problems (VELACS), Balkema, pp.1035-1040.
- 14) Iai, S. and Matsunaga, Y.: Mechanism of uplift of underground structures due to liquefaction,

- International symposium on Natural Disaster Reduction and Civil Engineering, 土木学会関西支部, pp.297-306, 1991.
- 15) Iai, S. and Kameoka, T.: Finite element analysis of earthquake induced damage to anchored sheet pile quay walls, *Soils and Foundations*, Vol.33, No.1, pp.71-91, 1993.
- 16) Iai, S.: Area of ground compaction against soil liquefaction, *Proceedings of 13<sup>th</sup> International Conference on Soil mechanics and Foundation engineering*, pp.1075-1078, 1994.
- 17) Iai, S., Morita, T., Kameoka, T., Matsunaga, Y. and Abiko, K.: Response of a dense sand deposit during 1993 Kushiro Oki earthquake, *Soils and Foundations*, Vol.35, No.1, pp.115-131, 1995.
- 18) 井合進, 一井康二, 森田年一: ケーソン式岸壁の有効応力解析, 兵庫県南部地震による港湾施設の被害考察 (その7), 港湾技研資料, No.813, pp.253-279, 1995.
- 19) Liu, H., Ichii, K., Morita, T. and Iai, S.: Analysis of deformation to the Kobe Ohashi Bridge Foundation, *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Kansai International Geotechnical Forum (KIG Forum '97)*, 地盤工学会関西支部, pp.189-198, 1997.
- 20) Iai, Tobita, Ozutsumi, Ueda: Dilatancy of granular materials in a strain space multiple mechanism model, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, 2010.

## 2. FLIP の理論

### 2-1 支配方程式

#### 2-1-1 支配方程式の定式化

##### (1) 運動方程式および水流の収支バランス式

Zienkiewicz ら<sup>1)</sup>に従い、間隙水で満たされた多孔質体の運動方程式および水流の収支バランスを表す式を次のようにおく (u-p formulation)。

$$\sigma_{ij,j} + \rho g_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2-1-1)$$

$$(k_{ij} p_{,j})_{,i} - \dot{\varepsilon}_{ii} - (k_{ij} \rho_f g_j)_{,i} = -(k_{ij} \rho_f \ddot{u}_j)_{,i} + n \dot{p} / K_f \quad (2-1-2)$$

ここに、

$\sigma_{ij}$	全応力 (対称テンソル)
$\rho$	密度 (土と水の複合物としての密度)
$g_i$	重力加速度ベクトル
$u_i$	土骨格の変位ベクトル
$k_{ij}$	透水係数 (対称テンソル)
$p$	間隙水圧
$\varepsilon_{ij}$	土骨格のひずみ (対称テンソル)
$\rho_f$	間隙水の密度
$n$	間隙率
$K_f$	間隙水の体積弾性係数

である (節末の付録参照)。

また、以下に示す関係がある。

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \delta_{ij} p \quad (\text{有効応力原理}) \quad (2-1-3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{微小ひずみテンソル}) \quad (2-1-4)$$

ここに、 $\sigma'_{ij}$  は有効応力、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。

なお、本定式化では、ひずみと応力に関しては、収縮・圧縮を負、伸張・引張を正とする。ただし、間隙水圧に関しては、圧縮を正とする。

##### (2) 境界条件と初期条件

式(2-1-1)(2-1-2)に対し、次に示す 4 種の境界条件を考える。

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \partial\Omega_u \quad (2-1-5)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{on } \partial\Omega_\sigma \quad (2-1-6)$$

$$p = \bar{p} \quad \text{on } \partial\Omega_p \quad (2-1-7)$$

$$q = -\dot{w}_j n_j = k_{ij} (p_{,i} - \rho_f g_i + \rho_f \ddot{u}_i) n_j = \bar{q} \quad \text{on } \partial\Omega_q \quad (2-1-8)$$

ここに、

- $\bar{u}_i$       $\partial\Omega_u$  境界上で規定される変位
- $\bar{t}_i$       $\partial\Omega_\sigma$  境界上で規定される表面力
- $\bar{p}$       $\partial\Omega_p$  境界上で規定される間隙水圧
- $\bar{q}$       $\partial\Omega_q$  境界上で規定される間隙水流入量
- $\dot{w}_i$      間隙水の骨格に対する相対速度（断面平均）

なお、 $\partial\Omega_u$  境界と  $\partial\Omega_\sigma$  境界を合わせたものが、対象領域  $\Omega$  の全表面  $\partial\Omega$  に等しい。また、 $\partial\Omega_u$  境界と  $\partial\Omega_\sigma$  境界の共通部分はない。 $\partial\Omega_p$  境界と  $\partial\Omega_q$  境界についても同様である。

一方、初期条件は領域  $\Omega$  の各点において、次のように与えられるものとする。

$$u_i = \dot{u}_i = \ddot{u}_i = 0 \quad (2-1-9)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\text{st}} = \sigma_{ij}^{\text{st}} - \delta_{ij} p^{\text{st}} \quad (2-1-10)$$

$$p = p^{\text{st}} \quad (2-1-11)$$

$$\dot{p} = 0 \quad (2-1-12)$$

特に、境界上では以下のように与えられるものとする。

$$u_i = \bar{u}_i^{\text{st}} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_u \quad (2-1-13)$$

$$t_i^{\text{st}} = \sigma_{ij}^{\text{st}} n_j = \bar{t}_i^{\text{st}} \quad \text{on } \partial\Omega_\sigma \quad (2-1-14)$$

$$p = \bar{p}^{\text{st}} \quad \text{on } \partial\Omega_p \quad (2-1-15)$$

$$q = k_{ij} (p_{,i}^{\text{st}} - \rho_f g_i) n_j = \bar{q}^{\text{st}} \quad \text{on } \partial\Omega_q \quad (2-1-16)$$

これ以降、初期条件により示される系の状態を基準状態と呼ぶことにする。基準状態では、式(2-1-1)は、

$$\sigma_{ij}^{\text{st}} + \rho g_i = 0 \quad (2-1-17)$$

となる。式(2-1-17)を用い、式(2-1-1)から  $\rho g_i$  の項を消去すると、次式を得る。

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{st}})_{,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (2-1-18)$$

また、基準状態では、式(2-1-2)は、

$$(k_{ij} p_{,j}^{\text{st}})_{,i} - (k_{ij} \rho_f g_j)_{,i} = 0 \quad (2-1-19)$$

となる。式(2-1-19)を用い、式(2-1-2)から重力加速度  $g_i$  を含む項を消去すると、次式を

得る。

$$\left(k_{ij}(p_{,j} - p_{,j}^{\text{st}})\right)_{,i} - \dot{\varepsilon}_{ii} = -(k_{ij}\rho_f \ddot{u}_j)_{,i} + n\dot{p}/K_f \quad (2-1-20)$$

以後、式(2-1-18)および式(2-1-20)を用いて、有限要素法に基づく定式化を行う。

### (3) 運動方程式の離散化

式(2-1-18)に示す運動方程式は、任意の試行関数（重み関数） $\varphi_i$ を用いて、以下のとおり書くことができる。

$$\int_{\Omega} \varphi_i \left( (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{st}})_{,j} - \rho \ddot{u}_i \right) dv + \int_{\partial\Omega_u} \varphi_i (\bar{u}_i - u_i) ds + \int_{\partial\Omega_\sigma} \varphi_i (\bar{t}_i - \sigma_{ij} n_j) ds = 0 \quad (2-1-21)$$

ここで、

$$\varphi_i = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_u \quad (2-1-22)$$

とすると、式(2-1-21)は、

$$\int_{\Omega} \varphi_i (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{st}})_{,j} dv - \int_{\Omega} \rho \varphi_i \ddot{u}_i dv + \int_{\partial\Omega} \varphi_i (\bar{t}_i - \sigma_{ij} n_j) ds = 0 \quad (2-1-23)$$

となる。式(2-1-23)の左辺第1項は、Gaussの定理を用いると、

$$\int_{\Omega} \varphi_i (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{st}})_{,j} dv = \int_{\partial\Omega} \varphi_i (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{st}}) n_j ds - \int_{\Omega} \varphi_{i,j} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{st}}) dv \quad (2-1-24)$$

と表され、これを式(2-1-23)に代入すると次式を得る。

$$\int_{\Omega} \varphi_{i,j} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{st}}) dv + \int_{\Omega} \rho \varphi_i \ddot{u}_i dv - \int_{\partial\Omega} \varphi_i (\bar{t}_i - \bar{t}_i^{\text{st}}) ds = 0 \quad (2-1-25)$$

式(2-1-25)によれば、表面力としては、基準状態における表面力からの増分のみを考慮すればよいことがわかる。この増加分を $\bar{t}_i^*$ で表すことにする。すなわち、

$$\bar{t}_i^* = \bar{t}_i - \bar{t}_i^{\text{st}} \quad (2-1-26)$$

より、式(2-1-25)は以下のように書くことができる。

$$\int_{\Omega} \varphi_{i,j} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{st}}) dv + \int_{\Omega} \rho \varphi_i \ddot{u}_i dv - \int_{\partial\Omega} \varphi_i \bar{t}_i^* ds = 0 \quad (2-1-27)$$

ここで、応力の対称性を用いると、

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}) (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{st}}) dv + \int_{\Omega} \rho \varphi_i \ddot{u}_i dv - \int_{\partial\Omega} \varphi_i \bar{t}_i^* ds = 0 \quad (2-1-28)$$

となり、さらに、次式のように書くことができる。

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\boldsymbol{\varphi})^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{st}}) dv + \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{\varphi}^T \ddot{\mathbf{u}} dv - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi}^T \bar{\mathbf{t}}^* ds = 0 \quad (2-1-29)$$

ここに、

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-1-30)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}) \quad (2-1-31)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_{st})^T = (\sigma_{xx}^{st} \quad \sigma_{yy}^{st} \quad \sigma_{zz}^{st} \quad \sigma_{xy}^{st} \quad \sigma_{yz}^{st} \quad \sigma_{zx}^{st}) \quad (2-1-32)$$

$$\mathbf{u}^T = (u_x \quad u_y \quad u_z) \quad (2-1-33)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^T = (\varphi_x \quad \varphi_y \quad \varphi_z) \quad (2-1-34)$$

$$(\bar{\mathbf{t}}^*)^T = (\bar{t}_x^* \quad \bar{t}_y^* \quad \bar{t}_z^*) \quad (2-1-35)$$

である。

ここで、試行関数  $\boldsymbol{\varphi}$  は任意であるので、試行関数として仮想変位  $\delta \mathbf{u}$  を採用すると、式(2-1-29)より以下のような仮想仕事の原理が導かれる。

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta \mathbf{u})^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{st}) dv + \int_{\Omega} \rho (\delta \mathbf{u})^T \ddot{\mathbf{u}} dv - \int_{\partial\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{t}}^* ds = 0 \quad (2-1-36)$$

さらに、以下のとおり書ける。

$$\int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{st}) dv + \int_{\Omega} \rho (\delta \mathbf{u})^T \ddot{\mathbf{u}} dv - \int_{\partial\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{t}}^* ds = 0 \quad (2-1-37)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}) \quad (2-1-38)$$

とする。なお、 $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ) は工学的ひずみである。

続いて、式(2-1-36)に示す運動方程式の離散化を行う。すなわち、変位などを補間関数  $\mathbf{H}$ 、節点変位ベクトル  $\mathbf{u}$  などを用いて、以下のように表す。

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{u} \quad (2-1-39)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{H}\ddot{\mathbf{u}} \quad (2-1-40)$$

ここに、2次元の場合、

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & \cdots & h_N & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & \cdots & 0 & h_N \end{bmatrix} \quad (2-1-41)$$

$$\underline{\mathbf{u}}^T = \left[ u_x^1 \quad u_y^1 \quad u_x^2 \quad u_y^2 \quad u_x^3 \quad u_y^3 \quad \cdots \quad u_x^N \quad u_y^N \right] \quad (2-1-42)$$

となる。なお、 $N$ は1要素あたりの節点数である。

さらに、ひずみベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}$  は次のように表される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{H}\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\underline{\mathbf{u}} \quad (2-1-43)$$

ここに、 $\mathbf{B}$ は節点変位-ひずみ変換マトリクスであり、次の関係がある。

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{H} \quad (2-1-44)$$

これより、式(2-1-36)に示す運動方程式が、以下のように離散化される。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{B}\delta\underline{\mathbf{u}})^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{st}) dv + \int_{\Omega} \rho (\mathbf{H}\delta\underline{\mathbf{u}})^T \mathbf{H}\ddot{\underline{\mathbf{u}}} dv - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{H}\delta\underline{\mathbf{u}})^T \bar{\mathbf{t}}^* ds \\ & = (\delta\underline{\mathbf{u}})^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{st}) dv + (\delta\underline{\mathbf{u}})^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dv \ddot{\underline{\mathbf{u}}} - (\delta\underline{\mathbf{u}})^T \int_{\partial\Omega} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}}^* ds = 0 \end{aligned} \quad (2-1-45)$$

式(2-1-45)は、任意の仮想変位に対して成立するので、

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{st}) dv + \mathbf{M}\ddot{\underline{\mathbf{u}}} = \mathbf{t}^* \quad (2-1-46)$$

となる。ここに、

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dv \quad (2-1-47)$$

$$\mathbf{t}^* = \int_{\partial\Omega} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}}^* ds \quad (2-1-48)$$

であり、2次元の場合、

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial h_N}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial h_N}{\partial y} & \frac{\partial h_N}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-1-49)$$

となる。

なお、式(2-1-46)からは、 $\partial\Omega_u$ 境界上の自由度に対する式は落ちているものとする。

#### (4) 有効応力・相対変位を用いた運動方程式

式(2-1-3)に示す有効応力原理より、式(2-1-46)は有効応力を用いて以下のように書くことができる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \mathbf{M}\ddot{\underline{\mathbf{u}}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{m}} (p - p^{st}) dv + \mathbf{t}^* \quad (2-1-50)$$

ここに、

$$\hat{\mathbf{m}}^T = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (2-1-51)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'^T = (\sigma'_{xx} \ \sigma'_{yy} \ \sigma'_{zz} \ \sigma'_{xy} \ \sigma'_{yz} \ \sigma'_{zx}) \quad (2-1-52)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}'_{st})^T = (\sigma'^{st}_{xx} \ \sigma'^{st}_{yy} \ \sigma'^{st}_{zz} \ \sigma'^{st}_{xy} \ \sigma'^{st}_{yz} \ \sigma'^{st}_{zx}) \quad (2-1-53)$$

ここで、間隙水圧を、節点における間隙水圧の値を用いて、以下のように離散化する。

$$p = \hat{\mathbf{H}}\mathbf{p} \quad (2-1-54)$$

ここに、補間関数  $\hat{\mathbf{H}}$  は以下のとおり。

$$\hat{\mathbf{H}} = [\hat{h}_1 \ \hat{h}_2 \ \hat{h}_3 \ \dots \ \hat{h}_N] \quad (2-1-55)$$

式(2-1-54)を式(2-1-50)に適用すると、運動方程式は、減衰項も考慮して次のようになる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \mathbf{Q}\mathbf{p}^* + \mathbf{t}^* \quad (2-1-56)$$

ここに、 $\mathbf{C}$  は減衰マトリクス、また、

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}_{st} \quad (2-1-57)$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{H}} dv \quad (2-1-58)$$

である。

さらに、基盤に一様に入射する地震動加速度  $\ddot{u}_g$  に対する応答を求めるために、節点変位を基盤の変位とそれに対する相対変位に分離する。すなわち、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + u_g \mathbf{I} \quad (2-1-59)$$

ここに、

$\mathbf{u}_r$  相対変位ベクトル

$u_g$  基盤の変位 (いずれかの座標軸の方向の変位)

$\mathbf{I}$  加振方向の自由度成分に 1、その他に 0 を割り当てたベクトル

式(2-1-59)を式(2-1-56)に代入すると、次式を得る。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_r = -\ddot{u}_g \mathbf{M}\mathbf{I} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \mathbf{Q}\mathbf{p}^* + \mathbf{t}^* \quad (2-1-60)$$

なお、 $\mathbf{I}$  は平行移動を表すベクトルであるから、次式が成り立つ。

$$\mathbf{B}\mathbf{I} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C}\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (2-1-61)$$

ひずみベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}$  は、式(2-1-43)(2-1-59)(2-1-61)より、 $\mathbf{u}$  でも  $\mathbf{u}_r$  でも同様に、以下のようにして求められる。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{u}_r \quad (2-1-62)$$

有効応力ではなく全応力で取り扱うべき要素が他にあれば、式(2-1-60)は次のようになる。

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_r = -\ddot{u}_g \mathbf{M} \mathbf{I} + \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{st} dv + \mathbf{Q} \mathbf{p}^* + \mathbf{t}^* \quad (2-1-63)$$

上式では、全領域  $\Omega$  を、有効応力により定式化される要素の存在する領域  $\Omega_1$  と、全応力に基づく要素の存在する領域  $\Omega_2$  に分離した。

さらに、相対変位ベクトル  $\mathbf{u}_r$  を、非拘束自由度  $\mathbf{u}_r^f$  と拘束自由度  $\mathbf{u}_r^c$  ( $\partial\Omega_u$  境界上の自由度) に分け、また、行列  $\mathbf{C}, \mathbf{M}$  もこれに応じて区分する。すなわち、

$$\mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r^f \\ \mathbf{u}_r^c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^f & \mathbf{C}^c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^f & \mathbf{M}^c \end{bmatrix} \quad (2-1-64)$$

すると、離散化された運動方程式(2-1-63)は、以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv + \mathbf{C}^f \dot{\mathbf{u}}_r^f + \mathbf{M}^f \ddot{\mathbf{u}}_r^f \\ & = -\ddot{u}_g \mathbf{M} \mathbf{I} - \mathbf{C}^c \dot{\mathbf{u}}_r^c - \mathbf{M}^c \ddot{\mathbf{u}}_r^c + \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{st} dv + \mathbf{Q} \mathbf{p}^* + \mathbf{t}^* \end{aligned} \quad (2-1-65)$$

#### (5) 非排水の場合の運動方程式

間隙水が非排水条件にあると仮定した場合、式(2-1-2)において  $k_{ij} = 0$  とおくことにより、次式を得る。

$$\dot{p} = -\frac{K_f}{n} \dot{\varepsilon}_{ii} \quad (2-1-66)$$

これを時間  $t$  に関して積分し、式(2-1-9)(2-1-11)に示す初期条件を考慮すると、

$$p^* \equiv p - p^{st} = -\frac{K_f}{n} \varepsilon_{ii} \quad (2-1-67)$$

となる。上式を式(2-1-50)に代入すると、式(2-1-60)に代えて次式を得る。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \hat{\mathbf{A}} \mathbf{u}_r + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_r = -\ddot{u}_g \mathbf{M} \mathbf{I} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \mathbf{t}^* \quad (2-1-68)$$

ここに、

$$\hat{\mathbf{A}} = \int_{\Omega} \frac{K_f}{n} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{m}}^T \mathbf{B} dv \quad (2-1-69)$$

あるいは、式(2-1-65)に対応して次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv + \hat{\mathbf{A}} \mathbf{u}_r + \mathbf{C}^f \dot{\mathbf{u}}_r^f + \mathbf{M}^f \ddot{\mathbf{u}}_r^f \\ & = -\ddot{u}_g \mathbf{M} \mathbf{I} - \mathbf{C}^c \dot{\mathbf{u}}_r^c - \mathbf{M}^c \ddot{\mathbf{u}}_r^c + \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{st} dv + \mathbf{t}^* \end{aligned} \quad (2-1-70)$$

## (6) 平面ひずみ問題

6章および〈事例編〉3章3-10を除いては、平面ひずみ状態を対象とするため、3次元問題として定式化された運動方程式および水流の収支バランス式を、2次元問題に適用できるように修正する。 $x$ 軸を水平方向、 $y$ 軸を鉛直方向、 $z$ 軸を面外方向とすると、平面ひずみ条件は以下のように書くことができる。

$$u_z = 0; \varepsilon_z = 0; \gamma_{yz} = 0; \gamma_{zx} = 0; \tau_{yz} = 0; \tau_{zx} = 0 \quad (2-1-71)$$

したがって、式(2-1-29)で用いられている各ベクトル記号の意味は、次のように修正される。

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-1-72)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}) \quad (2-1-73)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}) \quad (2-1-74)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_{st})^T = (\sigma_x^{st} \quad \sigma_y^{st} \quad \tau_{xy}^{st}) \quad (2-1-75)$$

$$\mathbf{u}^T = (u_x \quad u_y) \quad (2-1-76)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^T = (\varphi_x \quad \varphi_y) \quad (2-1-77)$$

$\sigma_z$ は非ゼロであるが、対応するひずみ成分 $\varepsilon_z$ がゼロであり、ひずみエネルギーに対する寄与がないので、運動方程式からは落としてある。

離散化の過程においても、節点変位ベクトル $\mathbf{u}$ からは $z$ 方向がなくなり、節点変位と変位場を関連付ける $\mathbf{H}$ マトリクス、および節点変位とひずみ場を関連付ける $\mathbf{B}$ マトリクスも修正される（式(2-1-41)および式(2-1-49)を参照のこと）。

### 2-1-2 解析手順の概要（非排水解析）

非排水条件での地震応答解析の場合、解くべき方程式は式(2-1-70)である。FLIPでは地震応答解析に先立ち、排水条件において自重解析を行うことにより、式(2-1-70)における地震応答解析時の初期応力（ $\boldsymbol{\sigma}'_{st}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_{st}$ ）を求めておく必要がある。自重解析において解くべき方程式は、式(2-1-70)から時間に依存する項を落とし、外力項として自重の影響を考慮すると、以下のとおり与えられる。

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{st} dv = \mathfrak{R} \quad (2-1-78)$$

$$\mathfrak{R} = -g \mathbf{M} \underline{\mathbf{I}}_y$$

これを、いくつかのステップに分割し、段階的に荷重を増加させて解く。第  $n$  荷重ステップまでの解が得られているものとし、第  $n+1$  荷重ステップにおける解を求めることを考える。第  $n+1$  荷重ステップにおいては、式(2-1-78)は以下のように書ける。

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}'_{st})_{n+1} dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}_{st})_{n+1} dv = \mathfrak{R}_{n+1} \quad (2-1-79)$$

$$\mathfrak{R}_{n+1} = -g_{n+1} \mathbf{M} \underline{\mathbf{I}}_y$$

ここで、節点変位ベクトル  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}$ 、および、これに対するひずみベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  から求めた応力ベクトル  $(\boldsymbol{\sigma}'_{st})_{n+1}$  の第  $i$  回目の試行値を、それぞれ  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i$ 、 $(\boldsymbol{\sigma}'_{st})_{n+1}^i$  とおく。また、第  $i$  回目の試行値に応じた不平衡力を  $\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^i$  とすると、これは以下のように求められる。

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^i = -\int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}'_{st})_{n+1}^i dv - \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}_{st})_{n+1}^i dv + \mathfrak{R}_{n+1} = \boldsymbol{\psi}_{n+1}^i + \boldsymbol{\chi}_{n+1}^i \quad (2-1-80)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\psi}_{n+1}^i = -\int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}'_{st})_{n+1}^i dv - \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}_{st})_{n+1}^i dv + \mathfrak{R}_{n+1} \quad (2-1-81)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{n+1}^i = 0 \quad (2-1-82)$$

第  $i+1$  回目の試行値  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$  を、

$$\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i \quad (2-1-83)$$

により求めるものとするれば、第  $i+1$  回目の試行値に応ずる不平衡力は、次式で近似できる。

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i+1} = \boldsymbol{\psi}_{n+1}^i + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i \Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i \quad (2-1-84)$$

ここに、

$$\left( \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i = -\mathbf{K}_{n+1}^i \quad (2-1-85)$$

$$\mathbf{K}_{n+1}^i = \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'_{st}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{n+1}^i \mathbf{B} dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{st}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{n+1}^i \mathbf{B} dv \quad (2-1-86)$$

したがって、第  $i+1$  回目の試行値に応ずる不平衡力がゼロとなるよう、Newton 法などを用いて、次式により節点変位増分を求めればよい。

$$\mathbf{K}_{n+1}^i \Delta \mathbf{u}_{n+1}^i = \boldsymbol{\Psi}_{n+1}^i \quad (2-1-87)$$

式(2-1-87)を解き得られた節点変位増分  $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^i$  を式(2-1-83)に代入すると、第  $i+1$  回目の試行値  $\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}$  が求められる。式(2-1-43)を用いて節点変位ベクトルからひずみベクトルを求め、さらにこれを構成式に適用することにより、自重解析後の応力ベクトル（地震応答解析前の初期応力状態）が求められる。

自重解析に引き続き、非排水条件のもとで動的解析である地震応答解析を実施する。まず、式(2-1-78)にならい、地震応答解析で対象とする式(2-1-70)を以下のように書いておく（添え字  $f, r$  は省略）。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv + \hat{\mathbf{A}} \mathbf{u} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = \mathfrak{R} \\ \mathfrak{R} = -\ddot{u}_g \mathbf{M} \mathbf{I} - \mathbf{C}^c \dot{\mathbf{u}}^c - \mathbf{M}^c \ddot{\mathbf{u}}^c + \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{st} dv + \mathbf{t}^* \end{aligned} \quad (2-1-88)$$

第  $n$  時間ステップまでの変位を既知とし、第  $n+1$  時間ステップにおける変位などを、式(2-1-88)を解くことにより求める。運動方程式の時間積分法には種々のものが提案されているが、ここでは中央差分法、Newmark 法、および、Wilson の  $\theta$  法を取り上げることとする。

#### (a) 中央差分

第  $n$  時間ステップにおける変位  $\mathbf{u}_n$  などは、以下の式を満たす。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}')_n dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma})_n dv + \hat{\mathbf{A}} \mathbf{u}_n + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_n = \mathfrak{R}_n \\ \mathfrak{R}_n = -(\ddot{u}_g)_n \mathbf{M} \mathbf{I} - \mathbf{C}^c \dot{\mathbf{u}}_n^c - \mathbf{M}^c \ddot{\mathbf{u}}_n^c + \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{st} dv + \mathbf{t}_n^* \end{aligned} \quad (2-1-89)$$

ここで、第  $n$  時間ステップにおける速度、加速度を以下のとおり表す。

$$\dot{\mathbf{u}}_n = (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) / (2\Delta t) \quad (2-1-90)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = (\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}) / (\Delta t)^2 \quad (2-1-91)$$

ここに、 $\Delta t$  は、時間ステップの刻みを表す。

式(2-1-90)(2-1-91)を式(2-1-89)に代入して整理すると、次式が得られる。

$$\left( \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_{n+1} = \boldsymbol{\Psi}_n + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{u}_n + \left( \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} - \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_{n-1} \quad (2-1-92)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\Psi}_n = - \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}')_n dv - \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma})_n dv - \hat{\mathbf{A}} \mathbf{u}_n + \mathfrak{R}_n \quad (2-1-93)$$

さらに、

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_n \quad (2-1-94)$$

とおき、これを式(2-1-92)に代入すると、以下のとおりとなる。

$$\left( \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \Delta \underline{\mathbf{u}}_n = \underline{\boldsymbol{\psi}}_n - \left( \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} - \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) (\underline{\mathbf{u}}_n - \underline{\mathbf{u}}_{n-1}) \quad (2-1-95)$$

これを解いて得られる節点変位増分  $\Delta \underline{\mathbf{u}}_n$  を式(2-1-94)に代入すると、第  $n+1$  時間ステップにおける節点変位が求められる。なお、強制変位や境界応力は、第  $n$  時間ステップのものを用いて計算する。

#### (b) Newmark 法

Newmark 法では、第  $n$  時間ステップにおける変位、速度、加速度を既知とし、第  $n+1$  時間ステップにおける変位  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}$  などを非線形反復により求める。第  $n+1$  時間ステップにおいては、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}')_{n+1} dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma})_{n+1} dv + \hat{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1} + \mathbf{M}\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1} &= \mathfrak{R}_{n+1} \\ \mathfrak{R}_{n+1} &= -(\ddot{u}_g)_{n+1} \mathbf{M} \mathbf{I} - \mathbf{C}^c \dot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1} - \mathbf{M}^c \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1} + \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{st} dv + \mathbf{t}_{n+1}^* \end{aligned} \quad (2-1-96)$$

ここで、節点変位ベクトル  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}$ 、および、これに対するひずみベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  から求めた応力ベクトル  $(\boldsymbol{\sigma}')_{n+1}$  の第  $i$  回目の試行値を、それぞれ  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i$ 、 $(\boldsymbol{\sigma}')_{n+1}^i$  とおく。また、第  $i$  回目の試行値に応じた不平衡力を  $\boldsymbol{\phi}_{n+1}^i$  とすると、これは以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_{n+1}^i &= - \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}')_{n+1}^i dv - \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma})_{n+1}^i dv - \hat{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i - \mathbf{C}\dot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^i - \mathbf{M}\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^i + \mathfrak{R}_{n+1} \\ &= \boldsymbol{\psi}_{n+1}^i + \boldsymbol{\chi}_{n+1}^i \end{aligned} \quad (2-1-97)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\psi}_{n+1}^i = - \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}')_{n+1}^i dv - \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma})_{n+1}^i dv - \hat{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \mathfrak{R}_{n+1} \quad (2-1-98)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{n+1}^i = -\mathbf{C}\dot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^i - \mathbf{M}\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^i \quad (2-1-99)$$

第  $i+1$  回目の試行値  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$  を、

$$\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i \quad (2-1-100)$$

により与えるものとするれば、第  $i+1$  回目の試行値に応ずる不平衡力は、自重解析の場合と同様に、次式で近似される。

$$\boldsymbol{\phi}_{n+1}^{i+1} = \boldsymbol{\psi}_{n+1}^i + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i \Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \boldsymbol{\chi}_{n+1}^{i+1} \quad (2-1-101)$$

ここに、

$$\left( \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i = -(\mathbf{K}_{n+1}^i + \hat{\mathbf{A}}) \quad (2-1-102)$$

$$\mathbf{K}_{n+1}^i = \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{n+1}^i \mathbf{B} \, dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{n+1}^i \mathbf{B} \, dv \quad (2-1-103)$$

Newmark 法においては、 $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$  および  $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$  を、 $\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}$  を用いて以下のように表す。

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = a_1 \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} - (a_1 \mathbf{u}_n + a_4 \dot{\mathbf{u}}_n + a_5 \ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (2-1-104)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = a_0 \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} - (a_0 \mathbf{u}_n + a_2 \dot{\mathbf{u}}_n + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (2-1-105)$$

ここに、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \\ a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1, \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right), \end{aligned} \quad (2-1-106)$$

以上より、第  $i+1$  回目の試行値に应ずる不平衡力をゼロとなるよう、次式を Newton 法などにより解くことにより、節点変位増分を求めればよい。

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{K}_{n+1}^i + \hat{\mathbf{A}} + a_1 \mathbf{C} + a_0 \mathbf{M} \right] \Delta \mathbf{u}_{n+1}^i \\ & = \boldsymbol{\psi}_{n+1}^i - (a_1 \mathbf{C} + a_0 \mathbf{M}) \mathbf{u}_{n+1}^i + \mathbf{C} (a_1 \mathbf{u}_n + a_4 \dot{\mathbf{u}}_n + a_5 \ddot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{M} (a_0 \mathbf{u}_n + a_2 \dot{\mathbf{u}}_n + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_n) \end{aligned} \quad (2-1-107)$$

なお、非線形反復計算の収束判定は、次式により行うものとする。

$$\left\| \boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i+1} \right\|_2 < \varepsilon_1 \quad \text{または} \quad \left\| \boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i+1} \right\|_2 / \left\| \boldsymbol{\varphi}_{n+1}^0 \right\|_2 < \varepsilon_2 \quad (2-1-108)$$

ここに、 $\left\| \right\|_2$  は二重ノルムを表し、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  としては小さな値を指定する。

節点変位増分が得られれば、式(2-1-100)により  $\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}$  を求め、これから  $(\boldsymbol{\sigma}')_{n+1}^{i+1}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}$  を評価すればよい。また、当該ステップにおける速度および加速度は、式(2-1-104)(2-1-105)により求められる。なお、強制変位や境界応力は、第  $n+1$  時間ステップのものを用いて計算する。

### (c) Wilson の $\theta$ 法

Wilson の  $\theta$  法では、第  $n$  時間ステップの時刻を  $t$  とすると、 $t + \theta \Delta t$  (ただし、 $\theta \geq 1.0$ ) における平衡条件を満足するように非線形反復計算を行う。定式化の流れは Newmark 法とほぼ同様であるので、式(2-1-101)を  $t + \theta \Delta t$  における平衡条件を満たすべく導かれた式であるとみなし、添え字  $n+1$  を  $t + \theta \Delta t$  に置き換える。すなわち、

$$\boldsymbol{\varphi}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} = \boldsymbol{\psi}_{t+\theta\Delta t}^i + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{t+\theta\Delta t}^i \Delta \mathbf{u}_{t+\theta\Delta t}^i + \boldsymbol{\chi}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} \quad (2-1-109)$$

ここに、

$$\Psi_{t+\theta\Delta t}^i = -\int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}')_{t+\theta\Delta t}^i \, dv - \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma})_{t+\theta\Delta t}^i \, dv - \hat{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^i + \mathfrak{R}_{t+\theta\Delta t} \quad (2-1-110)$$

$$\mathfrak{R}_{t+\theta\Delta t} = -\left(\ddot{u}_g\right)_{t+\theta\Delta t} \mathbf{M}\mathbf{I} - \mathbf{C}\dot{\underline{\mathbf{u}}}_{t+\theta\Delta t}^c - \mathbf{M}\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{t+\theta\Delta t}^c + \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}'_{st} \, dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}_{st} \, dv + \mathbf{t}_{t+\theta\Delta t}^* \quad (2-1-111)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} = -\mathbf{C}\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} - \mathbf{M}\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} \quad (2-1-112)$$

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\mathbf{u}}}\right)_{t+\theta\Delta t}^i = -\left(\mathbf{K}_{t+\theta\Delta t}^i + \hat{\mathbf{A}}\right) \quad (2-1-113)$$

$$\mathbf{K}_{t+\theta\Delta t}^i = \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T\left(\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}'}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{t+\theta\Delta t}^i \mathbf{B} \, dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T\left(\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{t+\theta\Delta t}^i \mathbf{B} \, dv \quad (2-1-114)$$

また、第*i*+1回目の試行値  $\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1}$  は、以下で表される。

$$\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} = \underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^i + \Delta\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^i \quad (2-1-115)$$

Wilson の  $\theta$ 法では、 $\dot{\underline{\mathbf{u}}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1}$  および  $\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1}$  を、 $\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1}$  により以下のとおり表す。

$$\dot{\underline{\mathbf{u}}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} = a_1\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} - (a_1\underline{\mathbf{u}}_n + 2\underline{\dot{\mathbf{u}}}_n + a_3\underline{\ddot{\mathbf{u}}}_n) \quad (2-1-116)$$

$$\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} = a_0\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} - (a_0\underline{\mathbf{u}}_n + a_2\underline{\dot{\mathbf{u}}}_n + 2\underline{\ddot{\mathbf{u}}}_n) \quad (2-1-117)$$

ここに、

$$a_0 = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}, \quad a_1 = \frac{3}{\theta\Delta t}, \quad a_2 = 2a_1, \quad a_3 = \frac{\theta\Delta t}{2} \quad (2-1-118)$$

以上より、第*i*+1回目の試行値に応ずる不平衡力をゼロとなるよう、次式を Newton 法などにより解くことにより、節点変位増分を求めればよい。

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{K}_{t+\theta\Delta t}^i + \hat{\mathbf{A}} + a_1\mathbf{C} + a_0\mathbf{M} \right] \Delta\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^i \\ & = \Psi_{t+\theta\Delta t}^i - (a_1\mathbf{C} + a_0\mathbf{M})\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^i + \mathbf{C}(a_1\underline{\mathbf{u}}_n + 2\underline{\dot{\mathbf{u}}}_n + a_3\underline{\ddot{\mathbf{u}}}_n) + \mathbf{M}(a_0\underline{\mathbf{u}}_n + a_2\underline{\dot{\mathbf{u}}}_n + 2\underline{\ddot{\mathbf{u}}}_n) \end{aligned} \quad (2-1-119)$$

### 2-1-3 多段階解析（築堤解析）

#### (1) 概要

多段階解析（築堤解析）では、多段階に分かれた一連の解析を逐次行う。通常の解析と異なるのは、例えば盛土の築堤過程を考慮する場合、堤体上部の土は築堤の途中段階から存在するように、ある段階以降に有効になる要素が存在すること、および、そのような要素の要素節点力を算定する場合は、要素が有効になる以前の段階で生じた変位は考慮しないことである。前者は原則として KILL スイッチ、後者は基準変位という考え方で表現する。なお、ケーソン式岸壁の解析を行う際に、ケーソン背面と裏込土の間にジョイント要素を導入し、初期自重解析では滑り方向の剛性  $K_s$  をゼロとすることで、裏込土がケーソンに対して自由に滑るようにして裏込土を正常に圧密させ

ることがある。地震応答解析では  $K_s$  を所定の値に戻すが、ジョイントの滑り方向の要素力を評価する際に、初期自重解析で生じた滑り方向の変位差を参照することは適当ではなく、地震応答解析の際に生じた変位差のみを参照すべきである。この場合は、初期自重解析では、KILL スイッチではなく  $K_s=0$  としてジョイント要素の一部機能を無効にし、地震応答解析では、基準変位の考え方により変位差を調整することになる。このようなタイプの解析も多段階解析（築堤解析）として取り扱う。

なお、FLIP (Ver.3.5) にて 2 段階まで取り扱うことのできる多段階解析機能（築堤解析機能）が整備されたが、種々の構造に対応できるよう、FLIP (Ver.4.2.5) において、99 段階まで取扱いが可能なように改良された。

## (2) 基準変位について

多段階解析（築堤解析）において、自重解析の段階数が  $n$ （動的解析も含めると  $n+1$ ）であるとする、原則として、 $n+1$ 通りの基準変位（の入れ物）を用意する。そして、材料ごとに参照する基準変位（の入れ物）を基準変位番号（IUST 等）で指定する（MATE 命令参照）。各要素は、要素構成節点の現段階での変位に、自分が参照すべき基準変位を加算した変位に基づいて要素力を算定する。例えば、 $n+1$ が 3 の場合、各段階から生きる要素は、それぞれ表 2-1-3-1 に示すような基準変位を参照することになる。

表 2-1-3-1 3 段階多段階解析の場合の各要素が参照する基準変位の例

解析段階	第 1 段階から 生きる要素	第 2 段階から生き る要素（第 1 段階 KILL 指定）	第 3 段階から生きる 要素（第 1 段階、第 2 段階 KILL 指定）
第 1 段階	0	-	-
第 2 段階	第 1 段階最終変位	0	-
第 3 段階 (動的解析)	第 1 段階最終変位 + 第 2 段階最終変位	第 2 段階最終変位	0

第 1 段階から生きる要素が参照すべき基準変位は、第 1 段階から順に、0、第 1 段階最終変位、第 1 段階最終変位 + 第 2 段階最終変位と変わっていく。基準変位番号 1 という名前を付けた基準変位の入れ物 UST(1)の内容を、解析段階ごとにこのように更新していくとすれば、第 1 段階から生きる要素が参照すべき基準変位番号は、各段階を通じて 1 となる。また、第 2 段階から生きる要素が参照すべき基準変位番号は、解析段階ごとに基準変位 UST(2)の内容を更新すれば、各段階を通して 2 となる。第 3 段階以降から生きる要素についても同様である。このように、基準変位の入れ物 UST(i)の

内容を更新するための指示をするのが、INIT 命令の INITSW である。表 2-1-3-2 には、各解析段階で指定する INITSW の値と、それにより設定される基準変位の入れ物 UST(i) の内容を示す。

なお、INIT 命令が INITSW=(i-1)×10 で実行された場合、前段階の UST(1)～UST(i-1) に対して、前段階の最終変位 U(i-1)を加算するという働きをする。

表 2-1-3-2 各段階で指定する INITSW の値と設定される基準変位 UST(i)の内容

段階	INITSW	UST(1)	UST(2)	UST(i-1)	UST(i)	UST(n)	UST(n+1)	最終変位
第 1 段階	0	0	0	0	0	0	0	U(1)
第 2 段階	10	U(1)	0	0	0	0	0	U(2)
第 3 段階	20	U(1)+U(2)	U(2)	0	0	0	0	U(3)
第 i 段階	(i-1)×10	$\sum_{k=1}^{i-1} U(k)$	$\sum_{k=2}^{i-1} U(k)$	$\sum_{k=i-1}^{i-1} U(k)$	0	0	0	U(i)
第 n 段階	(n-1)×10	$\sum_{k=1}^{n-1} U(k)$	$\sum_{k=2}^{n-1} U(k)$	$\sum_{k=i-1}^{n-1} U(k)$	$\sum_{k=i}^{n-1} U(k)$	0	0	U(n)
第 n+1 段階	n×10	$\sum_{k=1}^n U(k)$	$\sum_{k=2}^n U(k)$	$\sum_{k=i-1}^n U(k)$	$\sum_{k=i}^n U(k)$	$\sum_{k=n}^n U(k)$	0	U(n+1)

### (3) 支配方程式

多段階解析（築堤解析）を適用しない（1 段階のみの）自重解析の場合、解くべき方程式は以下ようになる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv = -g \mathbf{M} \mathbf{I}_v \quad (2-1-120)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}'_{st}$  は初期自重解析結果である有効応力、 $g$  は重力加速度、 $\mathbf{I}_v$  は質量行列から鉛直方向成分を抜き出すための行列である。式(2-1-120)を解き求められた  $\boldsymbol{\sigma}'_{st}$  は、自重解析に続いて実施される動的解析（地震応答解析）において用いられる（例えば、式(2-1-70)参照）。

一方、多段階解析（築堤解析）においては、解析対象領域を分割し、実際の施工過程を模擬する形で自重を加えていく。ここでは、解析対象領域を 3 分割 ( $\Omega_{v1}, \Omega_{v2}, \Omega_{v3}$ ) した場合の多段階自重解析について考える。まず、第 1 段階では領域  $\Omega_{v1}$  のみを考慮し、その他の領域（要素）は存在しないものとする。すべての基準変位をゼロとすると、第 1 段階における平衡方程式は、

$$\int_{\Omega_{v1}} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}'_1)_{1st} dV = -g\mathbf{M}_1\mathbf{I}_v \quad (2-1-121)$$

となり、これを解くことで領域  $\Omega_{v1}$  における変位  $U(1)$  が求まる。この変位  $U(1)$  により、続く第 2 段階における領域  $\Omega_{v1}$  の基準変位が、以下のように与えられる。

$$UST(1) = U(1) \quad (2-1-122)$$

なお、第 1 段階では領域  $\Omega_{v1}$  のみを対象としているため、領域  $\Omega_{v1}$  を除く領域に対しては、変位  $U(1)$  は定義されない。

続く第 2 段階では、領域  $\Omega_{v2}$  の自重のみを考慮し、領域  $\Omega_{v3}$  は存在しないものとする。このとき、平衡方程式は以下のように書ける。

$$\int_{\Omega_{v1}} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}'_1)_{2nd} dV + \int_{\Omega_{v2}} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}'_2)_{2nd} dV = -g\mathbf{M}_2\mathbf{I}_v + \int_{\Omega_{v1}} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}'_1)_{1st} dV \quad (2-1-123)$$

ここに、領域  $\Omega_{v1}$  における応力  $(\boldsymbol{\sigma}'_1)_{2nd}$  は、第 2 段階で得られる変位  $U(2)$  と式(2-1-122)に示す基準変位  $UST(1)$  の和に基づき、また領域  $\Omega_{v2}$  における応力  $(\boldsymbol{\sigma}'_2)_{2nd}$  は、第 2 段階で生じる変位  $U(2)$  により与えられる。なお、基準変位  $UST(2)$  はゼロである。式(2-1-123)を解くと、第 2 段階での最終変位  $U(2)$  が得られる。これにより、続く第 3 段階における領域  $\Omega_{v1}$ ,  $\Omega_{v2}$  の基準変位  $UST(1)$ ,  $UST(2)$  が、以下のように更新される。

$$UST(1) = U(1) + U(2) \quad (2-1-124)$$

$$UST(2) = U(2) \quad (2-1-125)$$

なお、第 2 段階では領域  $\Omega_{v1}$ ,  $\Omega_{v2}$  のみを対象としているため、領域  $\Omega_{v3}$  に対しては変位  $U(2)$  は定義されない。

さらに、自重解析の最終段階である第 3 段階では、領域  $\Omega_{v3}$  の自重のみを考慮し、平衡方程式を以下のように与える。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{v1}} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}'_1)_{3rd} dV + \int_{\Omega_{v2}} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}'_2)_{3rd} dV + \int_{\Omega_{v3}} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}'_3)_{3rd} dV \\ & = -g\mathbf{M}_3\mathbf{I}_v + \int_{\Omega_{v1}} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}'_1)_{2nd} dV + \int_{\Omega_{v2}} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}'_2)_{2nd} dV \end{aligned} \quad (2-1-126)$$

ここに、領域  $\Omega_{v1}$  における応力  $(\boldsymbol{\sigma}'_1)_{3rd}$  は、第 3 段階での変位  $U(3)$  と式(2-1-124)に示す基準変位  $UST(1)$  の和により、また、領域  $\Omega_{v2}$  における応力  $(\boldsymbol{\sigma}'_2)_{3rd}$  は、第 3 段階での変位  $U(3)$  と式(2-1-125)に示す基準変位  $UST(2)$  の和により与えられる。また、領域  $\Omega_{v3}$  における応力  $(\boldsymbol{\sigma}'_3)_{3rd}$  は、第 3 段階で得られる変位  $U(3)$  により与えられる。なお、基準変位  $UST(3)$  はゼロである。式(2-1-126)を解くと、第 3 段階での最終変位  $U(3)$  が得られる。これにより、次の第 4 段階（動的解析）における領域  $\Omega_{v1}$ ,  $\Omega_{v2}$ ,  $\Omega_{v3}$  の基準変位  $UST(1)$ ,  $UST(2)$ ,  $UST(3)$  が、以下のように与えられる。

$$UST(1) = U(1) + U(2) + U(3) \quad (2-1-127)$$

$$UST(2) = U(2) + U(3) \quad (2-1-128)$$

$$UST(3) = U(3) \quad (2-1-129)$$

動的解析（地震応答解析）においては、式(2-1-126)に示す自重解析の最終段階において得られた応力分布を初期条件として用いる。すなわち、以下に示すような平衡方程式を与える。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{v1}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_1 dV + \int_{\Omega_{v2}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_2 dV + \int_{\Omega_{v3}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_3 dV + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} \\ & = -\ddot{\mathbf{u}}_g \mathbf{M}\mathbf{I} + \int_{\Omega_{v1}} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}'_1)_{3rd} dV + \int_{\Omega_{v2}} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}'_2)_{2nd} dV + \int_{\Omega_{v3}} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}'_3)_{1st} dV \end{aligned} \quad (2-1-130)$$

式(2-1-130)の左辺の各要素力は、式(2-1-127)～(2-1-129)に示す各領域での基準変位に、動的解析で得られる変位を足し合わせた値により算定される。

#### (4) 多段階解析の手順（4段階法）

ここでは、多段階解析（築堤解析）の手順について、矢板式岸壁を例にして具体的に述べることにする。井合ら<sup>4)</sup>は、背面を埋め立てて築造する矢板式岸壁を対象に、地震直前の地盤・構造物系の応力状態（初期応力状態）を再現するため、その施工過程（埋立て地盤に岸壁を建設する過程）を模擬することを念頭に、以下のような多段階自重解析を行った。図 2-1-3-1 に手順の概要を示す。なお、以下に示す方法では、3段階の自重解析に引き続いて動的な地震応答解析を行うことから、この方法を“4段階法”と称することとする。

##### (a) 第1段階

まず、岸壁建設前の原地盤の応力状態を再現するため、海底面以深の地盤および矢板壁のみを解析対象として自重解析を行った。なお、矢板壁の鋼材の自重は、この解析段階およびこれ以降の解析段階において、無視することとした。

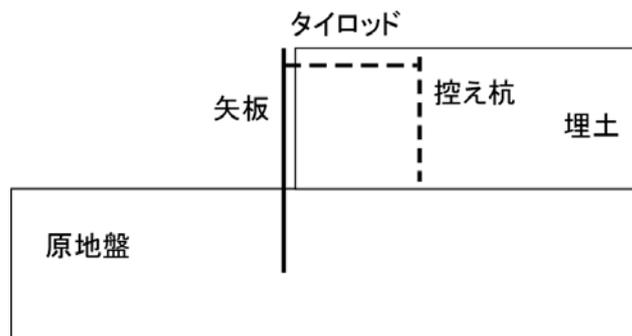
##### (b) 第2段階

埋立式の矢板式岸壁の建設では、その施工段階において、控え工周辺に土盛りをすることで、控え工の安定を確保しつつ前面矢板への裏埋めを行う。これを簡易的に模擬するため、自重解析の第2段階では、矢板のタイロッド取り付け点を水平方向に固定し、矢板背後のすべての埋土および控え工を加えて自重解析を行った。これにより、埋土は静止土圧係数  $K_0 \approx 0.5$  の状態になるよう圧密される。ただし、この解析段階では、控え工の剛性はゼロとし、控え工周辺の土の変形には影響を与えないようにした。

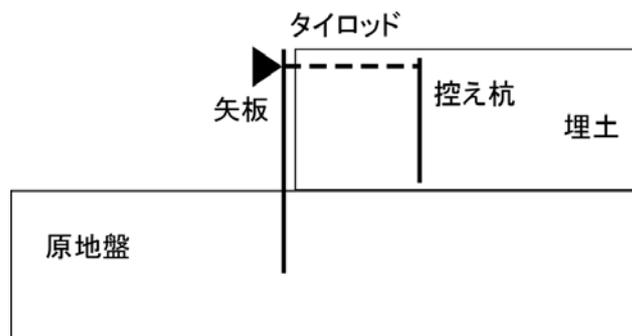
##### (c) 第3段階

自重解析の最終段階である第3段階では、タイロッドを加え、控え工の剛性も解析において考慮することとし、矢板のタイロッド取り付け点に第2段階で生じた人為的な反力が解消されるまで、逆向きに節点力を加えて解析を実施した。埋立式の矢板式岸壁の施工では、控え工背後の地盤を最後に埋立てするが、これを簡易的に表現するため、自重解析の第3段階、すなわちタイロッド取り付け点の節点力を解消する解析においては、控え工とその背後地盤を切り離し、控え工背後の主働側地盤が海側に人為的

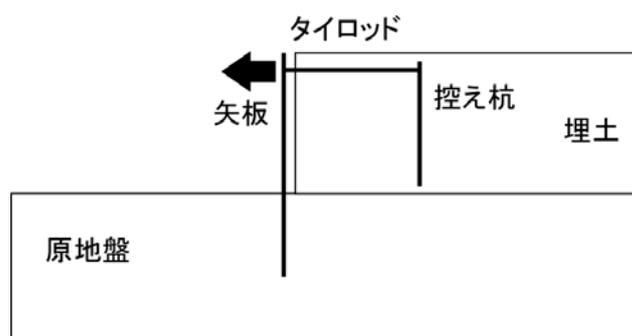
に変形するのを防いだ。この解析により、控え工と主働側の埋土には、大きさが等しく向きが反対の水平方向外力が自動的に作用することになり、前段階で解析した埋土の  $K_0$  がほぼ維持され、控え工にも前段階で得られた土圧が作用することになる。結果的に、矢板式岸壁の建設において、控え工背後の土を最後に埋立てて施工した場合の地盤の応力状態が模擬されるものと考えた。



(a) 第1段階の自重解析



(b) 第2段階の自重解析



(c) 第3段階（最終段階）の自重解析

図 2-1-3-1 矢板式岸壁（背面埋立式）における多段階解析の手順

#### (5) 多段階解析の手順（3段階法）

一方、三輪ら<sup>5)</sup>は、原地盤を掘削して築造される矢板式岸壁を対象にして、その建設過程を模擬することを念頭に、以下のような多段階自重解析を行った。図 2-1-3-2 に

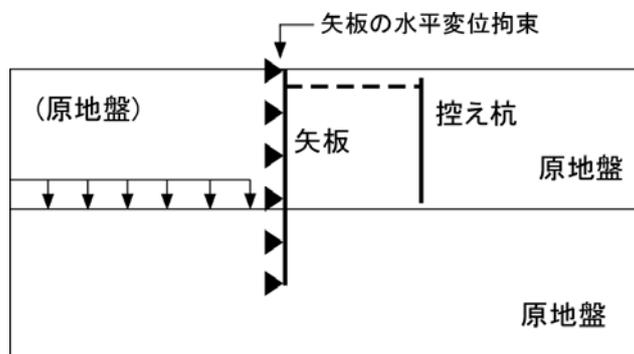
手順の概要を示す。なお、この方法では、2段階の自重解析に引き続いて動的な地震応答解析を行うことから、先の“4段階法”に対し“3段階法”と呼ぶこととする。

(a) 第1段階

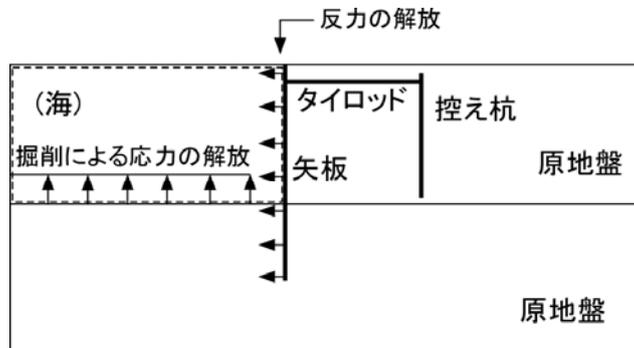
原地盤中に矢板、控え工を打設し、矢板前面を掘削して岸壁を構築する過程を、2段階の自重解析によりモデル化した。まず、原地盤中に矢板、控え工を打設した状態で、矢板には変形が生じないものとして自重解析を行った。実際には、次のような条件で自重解析を実施した。海の部分に地盤要素は設けず、海底面に上載地盤の有効応力相当の分布荷重を作用させた。また、矢板前面の原地盤掘削前に打設した矢板やその背後地盤には、前面にはらみ出す変形が生じないものとし、矢板の水平方向変位を拘束することで周囲の土の変形には影響を与えないようにした。なお、矢板および控え工の鋼材の自重は、この解析段階を含め、これに続く第2段階においても無視した。

(b) 第2段階

矢板前面の原地盤を掘削し、控え工、タイロッドおよび矢板に剛性を持たせることで、矢板背後地盤の土圧に抵抗する状態を模擬するよう解析を行った。この段階では、岸壁前面の掘削に伴い、前段階で海底地盤に作用させた有効応力相当の分布力を打ち消すと同時に、矢板の水平変位を拘束したことにより発生した反力を解消するため、



(a) 第1段階の自重解析



(b) 第2段階（最終段階）の自重解析

図 2-1-3-2 矢板式岸壁（前面掘削式）における多段階解析の手順

逆向きの節点力を矢板の各節点に作用させる。なお、控え工の背後地盤は原地盤であり、控え工の変形に追従して変形するとは考えにくいいため、控え工とその背後地盤を切り離し、控え工背後の主働側地盤が海側に人為的に変形するのを防ぐ。これは、“4段階法”における第3段階と同様の処置である。これら2段階の自重解析により、地震前の応力状態を設定する。

なお、各種解析パラメータなど、詳細は既往の文献を参照のこと。

## 付録 記号の表記について

### ローマ文字

$g_i$	重力加速度ベクトル
$k_{ij}$	透水係数テンソル
$K_f$	間隙水の体積弾性係数
$n$	間隙率
$p$	間隙水圧
$\underline{p}$	節点間隙水圧
$p^{\text{st}}$	初期状態における間隙水圧
$p^*$	初期状態からの間隙水圧増分
$\bar{p}$	$\partial\Omega_p$ 境界上で規定される間隙水圧
$\bar{p}^{\text{st}}$	$\partial\Omega_p$ 境界上で規定される初期間隙水圧
$\bar{q}$	$\partial\Omega_q$ 境界上で規定される間隙水流入量
$\bar{q}^{\text{st}}$	$\partial\Omega_q$ 境界上で規定される初期間隙水流入量
$\bar{t}_i$	$\partial\Omega_\sigma$ 境界上で規定される表面力ベクトル
$\bar{t}_i^{\text{st}}$	$\partial\Omega_\sigma$ 境界上で規定される初期表面力ベクトル
$\bar{t}_i^*, \bar{\mathbf{t}}^*$	基準状態からの表面力の増分ベクトル
$u_i, \mathbf{u}$	変位ベクトル（土骨格）
$\underline{u}$	節点変位ベクトル（土骨格）
$\bar{u}_i$	$\partial\Omega_u$ 境界上で規定される変位ベクトル
$\bar{u}_i^{\text{st}}$	$\partial\Omega_u$ 境界上で規定される初期変位ベクトル
$\ddot{u}_g$	基盤に一様に入射する地震動加速度
$\underline{u}_r$	基盤変位に対する相対変位ベクトル
$\dot{w}_i$	間隙水の骨格に対する相対速度ベクトル（断面平均）

### ギリシャ文字

$\delta_{ij}$	クロネッカーのデルタ
$\varepsilon_{ij}$	ひずみテンソル（土骨格）

$\varepsilon$	ひずみベクトル（土骨格）
$\rho$	土と水の複合物としての密度
$\rho_f$	間隙水の密度
$\sigma_{ij}$	全応力テンソル
$\sigma_{ij}^{st}$	初期状態における全応力テンソル
$\sigma'_{ij}$	有効応力テンソル
$\sigma'^{st}_{ij}$	初期状態における有効応力テンソル
$\sigma$	全応力ベクトル
$\sigma_{st}$	初期状態における全応力ベクトル
$\sigma'$	有効応力ベクトル
$\sigma'_{st}$	初期状態における有効応力ベクトル
$\varphi_i, \Phi$	試行関数（重み関数）
$\partial\Omega_u$	変位境界
$\partial\Omega_q$	応力境界
$\partial\Omega_p$	間隙水圧境界
$\partial\Omega_q$	間隙水流入量境界

## 参考文献

- 1) Zienkiewicz, O.C. and Bettess, P. : Soil and other saturated media under transient, dynamic conditions ; general formulation and the validity various simplifying assumptions, Soil Mechanics – Transient and Cyclic Loads, John Wiley&Sons, pp.1-16, 1982.
- 2) 小堤治：液状化地盤上の地盤・構造物系の地震時被害推定に関する数値解析法の研究，京都大学博士学位論文，2003.
- 3) 第四期 FLIP 研究会事務局：液状化による構造物被害予測プログラム FLIP（Ver.7.1.9-6-2）取扱説明書，2008.
- 4) 井合進，龍田昌毅，小堤治，溜幸生，山本裕司，森浩章：地盤の初期応力条件が矢板式岸壁の地震時挙動に与える影響の解析的検討，第26回地震工学研究発表会講演論文集，pp.809-812，2001.
- 5) 三輪滋，小堤治，池田隆明，岡由剛，井合進：初期応力状態を考慮した有効応力解析手法による鋼矢板岸壁の地震被害の評価，構造工学論文集，Vol.49(A)，pp.369-380，2003.

## 2-2 構成則

### 2-2-1概要

#### (1) 排水条件下にある砂の挙動のモデル

砂質土の繰り返し載荷時の挙動をモデル化するため、Towhata ら (1985) は、平面ひずみ状態における排水条件下の砂のせん断応力-せん断ひずみ関係について検討を加え<sup>補遺 2-1</sup>、多重せん断ばねモデル<sup>1)</sup>を提案した<sup>補遺 2-2</sup>。図 2-2-1に示すように、このモデルは、せん断応力/せん断ひずみ空間上に定義された固定の円とその円内にある可動点とから構成される。可動点は、無数の非線形ばねにより、固定された円と結ばれている。これらのばねは、種々の方向を向く仮想の単純せん断機構に対応している。各ばねの力-変位関係は、双曲線タイプの荷重-変位関係に従う。可動点の円の中心からの変位はせん断ひずみを表し、可動点に作用するばね力の合計はせん断応力を表す。このモデルは、主応力軸の回転により引き起こされる土の異方性を自動的に考慮に入れることができる。

地震の際には、土は繰り返し載荷され、土のせん断応力-せん断ひずみ関係は、履歴ループを描く。ループが囲む面積は、履歴減衰の大きさに関係する。土の挙動を模擬するためには、除荷および載荷の過程に対応するせん断応力-せん断ひずみ関係を確立する必要がある。排水状態にある土のこのような挙動を表すために、しばしば、Masing 則 (Masing, 1926) が適用される。双曲線モデルに対して Masing 則が適用された場合、その除荷・載荷曲線が描く履歴ループによる減衰定数は、大きなひずみレベルにおいては、実験により測定される減衰定数より大きくなることが知られている。Ishihara ら (1985) は、広く用いられている 1次元の単純せん断モデルに対して、Masing 則を修正することにより減衰定数を調節する方法を提案した<sup>2)</sup>。Iai ら (1990) は、この方法に基づき、多重せん断ばねモデルに対して、任意の最大減衰定数の双曲線型せん断ひずみ-減衰定数関係を導入した<sup>3)</sup>。

#### (2) 液状化特性のモデル

Towhata ら (1985) は、豊浦砂を用いて、等方圧密後の主応力軸の回転を含む各種応力経路による非排水繰り返しせん断挙動について、室内試験を通じた検討を行った。その結果、土に作用しているせん断応力の状態に応じて、その時の過剰間隙水圧は単位体積の土になされたせん断仕事の累積値と密接な関係にあり、この関係は載荷経路に依存しないこと、および、平均有効応力と最大せん断応力で規定される応力空間においては、累積せん断仕事の等高線を描くことができるということが明らかにされた<sup>4)</sup> (図 2-2-2参照)。

Iai ら (1990) は、この実験結果に基づき、非排水条件下の砂に対して、単位体積の土になされた塑性せん断仕事に応じて応力経路を与えるモデルを提案した<sup>5)</sup>。このモデルの概念図を図 2-2-3に示す。図の縦軸  $r$  は最大せん断応力  $\tau$  を初期平均有効応力  $\sigma_{m0}'$  で正規化したものであり、図の横軸は状態変数  $S$  で、これは準静的、非排水かつ全拘束圧力一定と言う実験の条件下においては、 $\sigma_m'/\sigma_{m0}'$  に一致する ( $\sigma_m'$  は平均有効応力)。そして、単位体積

の土になされた塑性せん断仕事の累積値に基づき、図 2-2-3に示す液状化フロントパラメータ  $S_0$  の位置が決定される。この状態において可能な応力経路は、図中に液状化フロントとして示されている。なお、図中の  $\phi_f'$  はせん断破壊角を、 $\phi_p'$  は変相角を表す。このモデルでは、液状化フロントの位置が決まれば、せん断応力比  $r$  に応じて状態変数  $S$  が定まり、この  $S$  に応じて、砂のせん断剛性とせん断強度を調節している。また、平均有効応力の算定に必要な塑性体積ひずみも  $S$  に応じて評価するとしている。調節された砂のせん断剛性とせん断強度は、多重せん断ばねモデルに反映されて、非排水条件下で繰り返しせん断される砂の挙動を表現する。

変相線より下の応力空間でなされた塑性せん断仕事と、変相線を超えて破壊線に至るまでの領域においてなされた塑性せん断仕事は、それらが同じ量であっても、負のダイラタンシーへの寄与程度、すなわち、液状化フロント  $S_0$  の進行に対する寄与程度は異なると予想される。従って、両者の寄与程度の差異を知る必要がある。しかしながら、上述の Towhata ら (1985) の実験では、その応力経路は概ね変相線以下の領域を辿っているため、この実験結果からこの問題に対する指針を得ることは困難であった。そこで、当初のモデルでは、塑性せん断仕事の負のダイラタンシーへの寄与程度を、応力状態に応じて次のように仮定した。すなわち、変相線の 2/3 以下の領域での寄与係数を 1 とし、変相線の 2/3 から破壊線に至るまでの領域では、寄与係数を線形に低減させ、破壊線でちょうど 0 となるように設定した。塑性せん断仕事は、その時の応力状態に応じて、この寄与係数を乗じて累積される。

上述の多重せん断ばねモデルと過剰間隙水圧モデルを組み合わせ、Iai ら (1990) は、砂の液状化時の挙動を表現する多重せん断機構モデルとして提案した<sup>3) 5)</sup>。このモデルは、FLIP プログラムにおいては、マルチスプリング要素として組み込まれている。本節では、まず、この多重せん断機構モデルについて示す。

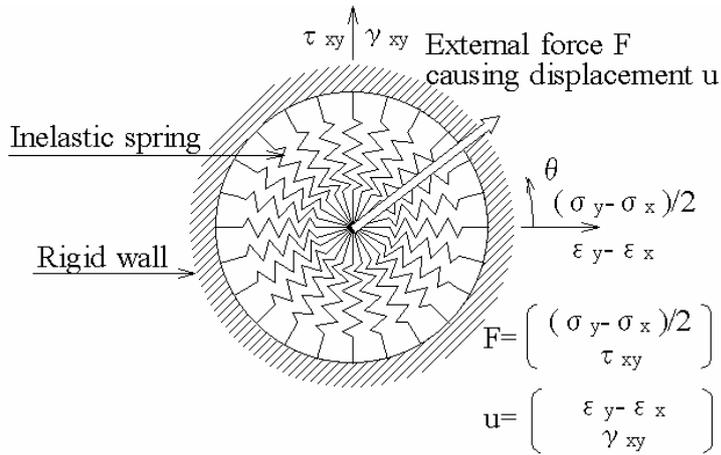


図 2-2-1 多重せん断ばねモデル (Towhata ら, 文献1)

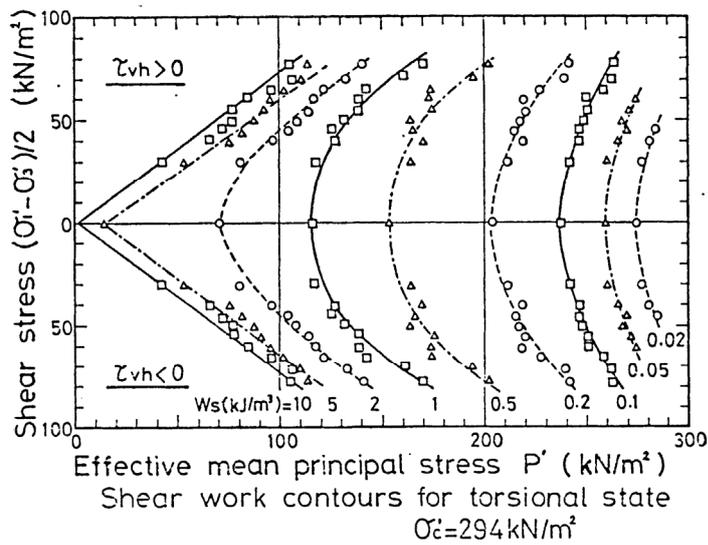


図 2-2-2 応力空間上の累積せん断仕事の等高線 (Towhata ら, 文献4)

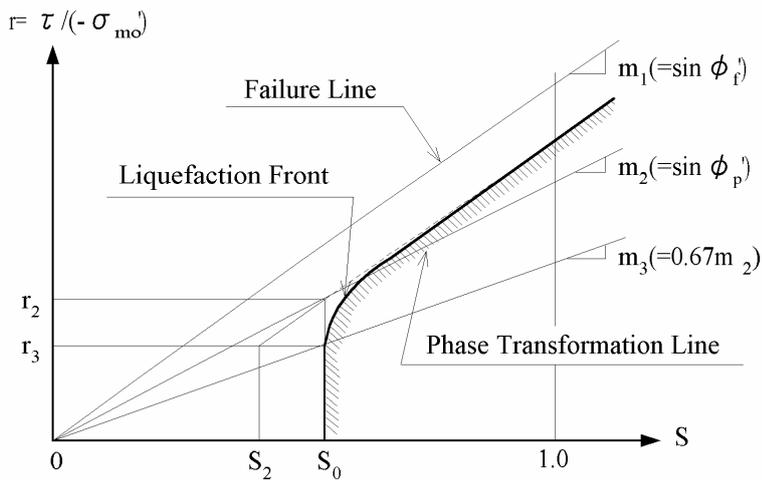


図 2-2-3 過剰間隙水圧モデルの概念図 (Iai ら, 文献3)

## 2-2-2 多重せん断機構に基づく砂の力学モデル

本節では、多重せん断機構モデル<sup>3)5)</sup>について詳述する。

### (1) 平均成分に対する構成則

#### (a) 準備

次式に示すように、ひずみおよび有効応力を偏差成分と平均成分に分ける。平均ひずみ成分は、さらに弾性成分と塑性成分に分離する。ひずみは初期状態からの増分である。ひずみ成分と応力成分の符号は、伸張・引張を正に、収縮・圧縮を負にとる。但し、間隙水圧は圧縮を正とする。

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_d\} + \{m\}\varepsilon_m = \{\varepsilon_d\} + \{m\}\varepsilon_{me} + \{m\}\varepsilon_{mp} \quad (2-2-1)$$

$$\{\sigma'\} = \{\sigma_d\} + \{m\}\sigma'_m \quad (2-2-2)$$

但し、

$$\{\varepsilon\}^T = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) \quad (\text{ひずみ})$$

$$\{\sigma'\}^T = (\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) \quad (\text{有効応力})$$

$$\{m\}^T = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$$

$$\varepsilon_m = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) / 3 \quad (\text{平均ひずみ})$$

$$\sigma'_m = (\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) / 3 \quad (\text{平均有効応力})$$

また、 $\{\varepsilon_d\}$ は偏差ひずみ、 $\{\sigma_d\}$ は偏差応力、 $\varepsilon_{me}$ は平均弾性ひずみ、 $\varepsilon_{mp}$ は平均塑性ひずみである。平均塑性ひずみ $\varepsilon_{mp}$ としては負のダイレタンスによるものを取り扱う。さらに、平均ひずみ、平均弾性ひずみおよび平均塑性ひずみの間には次の関係がある。

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{me} + \varepsilon_{mp} \quad (2-2-3)$$

ここで、平均成分と偏差成分に対し、それぞれ、次のような形の構成則を仮定する。

$$\sigma'_m = f(\varepsilon_{me}) \quad (2-2-4)$$

$$\{\sigma_d\} = \{g(\{\varepsilon_d\})\} \quad (2-2-5)$$

関数 $f$ の形は本項の後半で、また、関数 $\{g\}$ の形は2-2-2(3)項で示す。

#### (b) 平均有効応力の評価方針

本構成則では、以下の①～③に示す手順に従い、動的解析などの任意の時点における平均有効応力 $\sigma'_m$ を評価する。

- ① まず、平均ひずみ $\varepsilon_m$ を評価する。有限要素法では節点変位から直ちに求められる。

- ② (2-2-3)式に示す関係を用いて、平均ひずみ  $\varepsilon_m$  と平均塑性ひずみ  $\varepsilon_{mp}$  から平均弾性ひずみ  $\varepsilon_{me}$  を求める。
- ③  $\sigma_m' = f(\varepsilon_{me})$  の関係 ((2-2-4)式) から、平均有効応力  $\sigma_m'$  を算定する。

上記②において平均塑性ひずみ  $\varepsilon_{mp}$  の値が必要であるが、これは、その時点の累積塑性せん断仕事およびせん断応力に基づき、準静的非排水かつ全拘束圧一定と言う実験条件下において評価した塑性体積ひずみ  $3\varepsilon_{mp}$  の 1/3 として算定されたものを準用する。すなわち、以下に示す手順による。

- ① 2-2-1項で述べたように、その時点の累積塑性せん断仕事に基づき、液状化フロントパラメータ  $S_0$  および液状化フロントを決定する (図 2-2-3参照)。
- ② 液状化フロントとその時点のせん断応力に基づき、実験条件下では  $\sigma_m' / \sigma_{m0}'$  に一致する状態変数  $S$  を求める (図 2-2-3参照)。なお、 $\sigma_{m0}'$  は初期平均有効応力を表す。
- ③ 平均有効応力  $\sigma_m'$  (実験条件下) を次式により評価する。

$$\sigma_m' = S \sigma_{m0}' \quad (2-2-6)$$

- ④ 過剰間隙水圧  $P_{exl}$  (実験条件下) を有効応力の減少分として評価する。

$$P_{exl} = (\sigma_m' - \sigma_{m0}') \quad (2-2-7)$$

- ⑤ 全体積ひずみの変化  $3\varepsilon_m$  (実験条件下) は、間隙水の体積変化に等しいとおく。

$$3\varepsilon_m = -(n/K_f)P_{exl} \quad (2-2-8)$$

なお、 $n$  は間隙率、 $K_f$  は間隙水の体積弾性係数を表す。

- ⑥ 平均有効応力  $\sigma_m'$  と平均弾性ひずみ  $\varepsilon_{me}$  の関係 ((2-2-4)式) から平均弾性ひずみ  $\varepsilon_{me}$  (実験条件下) を評価する。

$$\sigma_m' = f(\varepsilon_{me}) \quad (2-2-9)$$

- ⑦ 全体積ひずみ  $3\varepsilon_m$  と弾性体積ひずみ  $3\varepsilon_{me}$  から塑性体積ひずみ  $3\varepsilon_{mp}$  (実験条件下) を評価する。

$$3\varepsilon_{mp} = 3\varepsilon_m - 3\varepsilon_{me} \quad (2-2-10)$$

従って、実験条件下での過剰間隙水圧  $P_{exl}$  は、(2-2-7)式、(2-2-9)式、(2-2-10)式、(2-2-8)式を用いると、次のように表すことができる。

$$P_{exl} = f(-\varepsilon_{mp} - nP_{exl}/3K_f) - f(0) \quad (2-2-11)$$

ただし、初期平均有効応力  $\sigma_{m0}'$  を  $f(0)$  とした。上式は、実験条件下における過剰間隙水圧  $P_{exl}$  と平均塑性ひずみ  $\varepsilon_{mp}$  との関係を表す。 $P_{exl}$  は、(2-2-6)式、(2-2-7)式より、状態変数  $S$  の関数であり、 $S$  は累積塑性せん断仕事とせん断応力の関数として求まる。実験条件が成り立たない場合でも、累積塑性せん断仕事とせん断応力から同じように  $S$  および  $P_{exl}$  を求め、これにより  $\varepsilon_{mp}$  を評価する。

(2-2-3)式の関係を用いると、構成則(2-2-4)式は次のように書ける。

$$\sigma_m' = f(\varepsilon_m - \varepsilon_{mp}(P_{exl})) \quad (2-2-12)$$

上式の  $\varepsilon_{mp}$  は、(2-2-11)式を  $\varepsilon_{mp}$  について解いて求めたものを用いる。偏差成分もまとめて書くと次式を得る。

$$\{\sigma'(\{\varepsilon\}, P_{exl})\} = \{m\}f(\varepsilon_m - \varepsilon_{mp}(P_{exl})) + \{g(\{\varepsilon_d\})\} \quad (2-2-13)$$

### (c) 平均有効応力と平均弾性ひずみの関係

ここで、 $X$  と  $Y$  を以下のようにおく。

$$Y = -\sigma_m' \quad (2-2-14)$$

$$X = -3(\varepsilon_{me} + \varepsilon_{me}^0) = -3(\varepsilon_m + \varepsilon_{me}^0 - \varepsilon_{mp}) \quad (2-2-15)$$

但し、 $\varepsilon_{me}^0$  は初期平均有効応力  $\sigma_{m0}'$  に対応する初期平均弾性ひずみである。また、初期状態では平均塑性ひずみは  $0$  とした。 $Y$  は、平均有効応力  $\sigma_m'$  の符号を反転して圧縮を正としたものである。 $X$  は、体積弾性ひずみの符号を反転したものであり、初期圧密前の状態 ( $\sigma_m'=0$ ) を基準とした体積ひずみである。

ここで定義した  $X$  と  $Y$  との間に次の関係を仮定する。

$$\Delta Y = K \Delta X \quad (2-2-16)$$

但し、 $K$  は増分型の体積弾性係数であり、次式により与えられるものとする。

$$K = K_{ma} \left( \frac{Y}{Y_{ma}} \right)^{m_K} \quad (m_K \neq 1) \quad (2-2-17)$$

なお、 $K_{ma}$  は平均有効応力が  $\sigma_{ma}'$  (基準平均有効拘束圧) である時の増分型の体積弾性係数である。 $m_K$  は  $K$  の拘束圧依存性を表すパラメータである。また、 $Y_{ma}$  は次式で与えられる。

$$Y_{ma} = -\sigma_{ma}' \quad (2-2-18)$$

(2-2-16)式を積分し、得られた式を  $Y$  について解くと次式を得る

補遺 2-3。但し、 $X=0$  の時、 $Y=0$  とした。

$$Y = BX^{\frac{1}{1-m_K}} \quad (2-2-19)$$

但し、

$$B = \left[ (1-m_K) \frac{K_{ma}}{(Y_{ma})^{m_K}} \right]^{\frac{1}{1-m_K}} \quad (2-2-20)$$

上式から、次のように、 $f(\varepsilon_{me})$  の形が定まる。

$$\left. \begin{aligned} f(\varepsilon_{me}) &= \sigma'_m = -Y \\ &= -B (-3\varepsilon_{me} - 3\varepsilon_{me}^0)^{\frac{1}{1-m_K}} \end{aligned} \right\} \quad (2-2-21)$$

#### (d) 液状化を考慮する場合の平均有効応力評価法

液状化を考慮する場合は、実験条件下の  $P_{exl}$  は、(2-2-11)式、(2-2-21)式より、次のように表される。

$$P_{exl} = B \cdot \left[ X_{st}^{\frac{1}{1-m_K}} - \left( 3\varepsilon_{mp} + \frac{nP_{exl}}{K_f} + X_{st} \right)^{\frac{1}{1-m_K}} \right] \quad (2-2-22)$$

但し、 $X_{st} = -3\varepsilon_{me}^0$  とした。上式を  $\varepsilon_{mp}$  について解くと、次式を得る。

$$3\varepsilon_{mp} = \left[ X_{st}^{\frac{1}{1-m_K}} - \frac{P_{exl}}{B} \right]^{1-m_K} - \frac{nP_{exl}}{K_f} - X_{st} \quad (2-2-23)$$

さらに、(2-2-6)式、(2-2-7)式により、 $P_{exl}$  を次のように、状態変数  $S$  で表す。

$$P_{exl} = (1-S)Y_{st} \quad (2-2-24)$$

なお、 $Y_{st} = -\sigma_{m0}'$  とした。すると、(2-2-23)式は、次のようになる。

$$3\varepsilon_{mp} = (Y_{st}S/B)^{1-m_K} - nY_{st}(1-S)/K_f - X_{st} \quad (2-2-25)$$

結局、

①  $S$  に応じて  $\varepsilon_{mp}$  (実験条件下) が定まる。 (2-2-25)式

②  $\varepsilon_m$  (任意の条件下) と  $\varepsilon_{mp}$  (実験条件下) に応じて  $X$  が定まる。 (2-2-15)式

③  $X$ に応じて $Y$ が定まる。 (2-2-19)式

④  $Y$ に応じて $\sigma_m'$ が定まる。 (2-2-14)式

## (2) 過剰間隙水圧モデル

### (a) 液状化フロントパラメータ $S_0$ と状態変数 $S$

液状化の進行程度を表す液状化フロントパラメータ  $S_0$  は (図 2-2-3参照)、正規化したせん断仕事  $w$  の関数として、次式により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= 1 - 0.6(w/w_1)^{p_1} && (\text{if } w < w_1) \\ S_0 &= (0.4 - S_1)(w_1/w)^{p_2} + S_1 && (\text{if } w > w_1) \end{aligned} \right\} \quad (2-2-26)$$

ここに、 $w$  は次式で与えられる。

$$w = W_s / W_n \quad (2-2-27)$$

上式で  $W_s$  は累積塑性せん断仕事であり、その評価法は後述する。 $W_n$  は初期せん断強度  $\tau_{m0}$  と初期基準ひずみ  $\gamma_{m0}$  を用いて、次式により与えられる。

$$W_n = \tau_{m0} \gamma_{m0} / 2 \quad (2-2-28)$$

初期せん断強度  $\tau_{m0}$  と初期基準ひずみ  $\gamma_{m0}$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{m0} &= Y_{st} \sin \phi'_f \\ \gamma_{m0} &= \tau_{m0} / \left( G_{ma} \left| \frac{Y_{st}}{Y_{ma}} \right|^{m_G} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-2-29)$$

ここに、 $G_{ma}$  は基準初期せん断剛性であり、平均有効拘束圧が  $\sigma_{ma}'$  (基準平均有効拘束圧) の場合の初期せん断剛性である。また、 $Y_{st} = -\sigma_{m0}'$ 、 $Y_{ma} = -\sigma_{ma}'$  である。 $m_G$  は初期せん断剛性の有効拘束圧依存性を表すパラメータであり通常 0.5 とする。

(2-2-26)式により液状化フロントパラメータ  $S_0$  を評価するためには、 $w_1$  の他に  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $S_1$  を与えることが必要である (以下、これらのパラメータを後述のパラメータ  $c_1$  と合わせて液状化パラメータと称する)。 $w_1$  は全体的な液状化強度を規定し、 $p_1$ 、 $p_2$  は、それぞれ、液状化過程の前半と後半の過剰間隙水圧の上昇特性を規定する。また、 $S_1$  は  $S_0$  の下限値を与える。

準静的非排水かつ全拘束圧力一定の条件下において  $\sigma_m' / \sigma_{m0}'$  に一致する状態変数  $S$  は、せん断応力比  $r (= \tau / \sigma_{m0}')$  と液状化フロントパラメータ  $S_0$  から次式により定める (図 2-2-3 参照)。但し、 $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + ((\sigma'_y - \sigma'_x) / 2)^2}$  である。

$$\begin{cases} S = S_0 & (\text{if } r < r_3) \\ S = S_2 + \sqrt{(S_0 - S_2)^2 + [(r - r_3)/m_1]^2} & (\text{if } r > r_3) \end{cases} \quad (2-2-30)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{ここに、} r_2 = m_2 S_0, \quad r_3 = m_3 S_0, \quad S_2 = S_0 - (r_2 - r_3)/m_1 \\ &\text{ただし、} m_1 = \sin \phi_f', \quad m_2 = \sin \phi_p' (\phi_p' \text{は変相角}), \quad m_3 = 0.67m_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-2-31)$$

### (b) 累積塑性せん断仕事の評価法

まず、累積塑性せん断仕事  $W_s$  の初期値を設定する。初期のせん断応力比を  $r_{st}$  とすると、 $r_{st} \leq m_3$  の場合、初期の  $S_0$  および  $W_s$  は次式の通りとする。

$$S_0 = 1, \quad W_s = 0 \quad (2-2-32)$$

$r_{st} > m_3$  の場合、初期の状態変数  $S$  を 1 とおいて、(2-2-30)式を用いて  $S_0$  を逆算する。すなわち、 $S=1, r=r_{st}$  を(2-2-30)式に代入して整理すると、次の  $S_0$  に関する二次方程式を得る。

$$(1 - m_4 S_0)^2 = (S_0 - m_4 S_0)^2 + [(r_{st} - m_3 S_0)/m_1]^2 \quad (2-2-33)$$

これを解いて初期の  $S_0$  を求める。但し、 $m_4 = 1 - (m_2 - m_3)/m_1$  である。初期の  $S_0$  が求められたら、塑性せん断仕事  $W_s$  の初期値を求める。これは、(2-2-26)式 ( $S_0$  と  $w$  との関係式) の逆算による。

塑性せん断仕事  $W_s$  は、次式に示すように、塑性せん断仕事増分  $\Delta W_s$  に寄与係数  $R$  を乗じたものを累積して求める。なお、寄与係数  $R$  については後述する。

$$W_s = \sum R \Delta W_s \quad (2-2-34)$$

ここに、塑性せん断仕事増分  $\Delta W_s$  は、全せん断仕事増分  $\Delta W_{st}$  から弾性せん断仕事増分  $\Delta W_{se}$  にパラメータ  $c_l$  (液状化パラメータの一つ) を乗じたものを差し引いて求める(次式)。 $c_l$  は、理論上は 1.0 だが、これを調節することにより、液状化を引き起こすせん断応力比の下限值を制御することができる。

$$\Delta W_s = \Delta W_{st} - c_l \Delta W_{se} \quad (\text{負であれば、} \Delta W_s = 0 \text{ とする}) \quad (2-2-35)$$

なお、平面ひずみ状態を対象とする場合は、 $\Delta W_{st}$  と  $\Delta W_{se}$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta W_{st} &= \left| \left( \frac{\sigma'_y - \sigma'_x}{2} \right) \Delta(\epsilon_y - \epsilon_x) + \tau_{xy} \Delta \gamma_{xy} \right| \\ \Delta W_{se} &= \left| \tau \Delta \left( \frac{\tau}{G_0} \right) \right| \\ \tau &= \sqrt{\left( \frac{\sigma'_y - \sigma'_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-2-36)$$

ここに、 $G_0$ は初期せん断剛性を表す。

寄与係数  $R$ は塑性せん断仕事のうち負のダイランシーへ寄与する割合を与える補正係数であり、以下のように定める。まず、 $S_w$ を以下のように設定する。

$$S_w=0.4 \quad (\text{初期 } S_0 \geq 0.4 \text{ の場合})$$

$$S_w=0.4+(\text{初期 } S_0-0.4) S_0 / \text{初期 } S_0 \quad (\text{初期 } S_0 < 0.4 \text{ の場合})$$

$S_w$  (=0.4 など) は、寄与係数の設定法を切り替える状態変数  $S$  の境界値である。この  $S_w$  に基づき、寄与係数  $R$ を以下のように定める (図 2-2-3参照)。

$S \geq S_w$  の場合

$$R=1 \quad (r \leq S m_3 \text{ の場合})$$

$$R=(m_1-r/S)/(m_1-m_3) \quad (r > S m_3 \text{ の場合})$$

$S < S_w$  の場合

$$R=1 \quad (r \leq S_w m_3 \text{ の場合})$$

$$R=(m_1-r/S_w)/(m_1-m_3) \quad (r > S_w m_3 \text{ の場合})$$

(2-2-37)

### (c) 初期せん断剛性とせん断強度

過剰間隙水圧モデルの状態変数  $S$  および液状化フロントパラメータ  $S_0$  の値に応じて、せん断強度  $\tau_f$  およびせん断剛性  $G_0$  を定める。

まず、 $S_b$ を以下のように設定する。

$$S_b = \min(\text{初期 } S_0, 0.4) \quad (2-2-38)$$

$S_b$  はせん断強度などの算定法を切り替える液状化フロントパラメータ  $S_0$  の境界値である。この  $S_b$  に基づき、せん断強度と初期せん断剛性を以下のように算定する。

$$\begin{aligned} S_0 \geq S_b \text{ の時,} \\ \tau_f = \tau_{m0} S, \quad G_0 = \tau_f / \gamma_{m0} \end{aligned} \quad (2-2-39)$$

$$\begin{aligned} S_0 < S_b \text{ の時,} \\ \tau_f = \tau_{m0} S + \Delta \tau_f, \quad G_0 = \tau_f / \gamma_m \end{aligned} \quad (2-2-40)$$

ここに、

$$\Delta \tau_f = \Delta r_m \left| \sigma'_{m0} \right| \quad (2-2-41)$$

$$\Delta r_m = (m_1 - m_2) (S_b - S_0) \frac{0.4}{S_b} \quad (2-2-42)$$

$$\gamma_m = \gamma_{m0} / (S_0 / S_b) \quad (2-2-43)$$

### (3) 応力-ひずみ関係と接線勾配

(2-2-13)式に示した構成則および後述する接線剛性行列の組立に必要となる  $\partial \sigma' / \partial \varepsilon$  の具体的な形を以下に示す。なお、 $\partial \sigma' / \partial \varepsilon$  を表す式については後で修正する。

平均成分に対する構成則の具体的な形は、既に2-2-2(1)(c)項で得られている。ここでは平面ひずみ状態を対象とするので、当該構成則における  $\sigma_m'$  として  $(\sigma_x' + \sigma_y')/2$  を、また体積ひずみ  $3 \varepsilon_m$  として  $\varepsilon_x + \varepsilon_y$  を用いる。

次に偏差成分であるが、ここでは  $(\sigma_y' - \sigma_x')/2$  および  $\tau_{xy}$  を応力成分として選び、これらと、ひずみ成分  $(\varepsilon_y - \varepsilon_x)$  および  $\gamma_{xy}$  との関係多重せん断ばねモデル<sup>1)</sup> (Towhata ら, 1985) として与える。なお、面外方向の応力  $\sigma_z'$  は次式で評価する。

$$\sigma_z' = \nu(\sigma_x' + \sigma_y') \quad (2-2-44)$$

ここに  $\nu$  はポアソン比である。

#### (a) 応力-ひずみ関係

前述の通り、せん断応力-せん断ひずみ関係は、平面ひずみを対象とする多重せん断ばねモデルで表現する (図 2-2-1参照)。同モデルは無数のばねから構成されるが、プログラムへの実装を考慮して離散化する。すなわち、1/4 円当たり  $n$  本のばねで近似する<sup>補遺 2-4</sup>。また、互いに 180 度の位置にある 2 本のばねに対しては、1 本のばねを考えて、そのばね力を 2 倍することにより、2 本分のばねの効果を考慮する。

結局、応力-ひずみ関係は、以下に示す、平均成分一つ、偏差成分二つの、計三式で与えられる<sup>補遺 2-5</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x' + \sigma_y'}{2} &= -Y = -BX \frac{1}{1-m_K} & (X > 0) \\ &= 0 & (X \leq 0) \end{aligned} \quad (2-2-45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y' - \sigma_x'}{2} &= 2 \sum_{i=1}^{2n} F(\gamma_{\theta_i} + (\gamma_{\theta_i})_{st}) \cos \theta_i \Delta \theta & (X > 0) \\ &= 0 & (X \leq 0) \end{aligned} \quad (2-2-46)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 2 \sum_{i=1}^{2n} F(\gamma_{\theta_i} + (\gamma_{\theta_i})_{st}) \sin \theta_i \Delta \theta & (X > 0) \\ &= 0 & (X \leq 0) \end{aligned} \quad (2-2-47)$$

但し、

$$X = -(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)_{st} + \varepsilon_p \quad (2-2-48)$$

$$\varepsilon_p = (Y_{st} S/B)^{1-m_K} - nY_{st} (1-S)/K_f + (\varepsilon_x + \varepsilon_y)_{st} \quad (2-2-49)$$

$$B = \left[ (1 - m_K) \frac{K_{ma}}{(Y_{ma})^{m_K}} \right]^{\frac{1}{1-m_K}} \quad (2-2-50)$$

であり、 $X \leq 0$  は引張り破壊を表す。その他の諸記号の意味は以下の通りである。

$(\varepsilon_x + \varepsilon_y)_{st}$  : 初期状態における体積ひずみ

$F(\gamma)$  : ばね変位  $\gamma$  に応じた 1 ラジアン当たりのばね力で、双曲線タイプの関数

$\Delta \theta = \pi/2n$  : ばねの配置間隔 (ラジアン)

$$\gamma_{\theta_i} = \cos \theta_i (\varepsilon_y - \varepsilon_x) + \sin \theta_i \gamma_{xy} : i \text{ 番目のばねのばね変位} \quad (2-2-51)$$

$\theta_i = (i-1) \Delta \theta$  :  $i$  番目のばねの角度

初期応力は、 $X_{st} (= -(\varepsilon_x + \varepsilon_y)_{st}) > 0$  であれば、次式で与えられる。

$$\left( \frac{\sigma'_x + \sigma'_y}{2} \right)_{st} = -BX_{st}^{\frac{1}{1-m_K}} \quad (2-2-52)$$

$$\left( \frac{\sigma'_y - \sigma'_x}{2} \right)_{st} = 2 \sum_{i=1}^{2n} F((\gamma_{\theta_i})_{st}) \cos \theta_i \Delta \theta \quad (2-2-53)$$

$$(\tau_{xy})_{st} = 2 \sum_{i=1}^{2n} F((\gamma_{\theta_i})_{st}) \sin \theta_i \Delta \theta \quad (2-2-54)$$

但し、初期状態においては  $\varepsilon_p = 0$  とした。また、 $(\gamma_{\theta_i})_{st}$  は初期状態におけるばね変位を表す。

個々のスプリングの変位-力関係を表す関数  $F(\gamma)$  の具体的な形は次項で示す。

#### (b) 接線勾配 $\partial \sigma' / \partial \varepsilon$

(2-2-45)式～(2-2-47)式から、ひずみ増分とそれに対する応力増分の関係を以下のように表すことができる。

$$\Delta \left( \frac{\sigma'_x + \sigma'_y}{2} \right) = K_{ma} \left( \frac{Y}{Y_{ma}} \right)^{m_K} (\Delta \varepsilon_x + \Delta \varepsilon_y - \Delta \varepsilon_p) \quad (2-2-55)$$

$$\Delta \left( \frac{\sigma'_y - \sigma'_x}{2} \right) = 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{dF}{d\gamma} (\gamma_{\theta_i} + (\gamma_{\theta_i})_{st}) \Delta \gamma_{\theta_i} \cos \theta_i \Delta \theta \quad (2-2-56)$$

$$\Delta \tau_{xy} = 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{dF}{d\gamma} (\gamma_{\theta_i} + (\gamma_{\theta_i})_{st}) \Delta \gamma_{\theta_i} \sin \theta_i \Delta \theta \quad (2-2-57)$$

ただし、平均有効応力相当の  $Y$  の変化と、拘束圧の変化によるばね力  $F$  の上限値などの変

化は無視した。なお、

$$\Delta \gamma_{\theta_i} = \cos \theta_i \Delta(\varepsilon_y - \varepsilon_x) + \sin \theta_i \Delta \gamma_{xy} \quad (2-2-58)$$

上式より、次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma'_x \\ \Delta \sigma'_y \\ \Delta \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D_t] \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} K_{ma} \left( \frac{Y}{Y_{ma}} \right)^{m_k} \Delta \varepsilon_p \quad (2-2-59)$$

なお、

$$\begin{aligned} [D_t] = & K_{ma} \left( \frac{Y}{Y_{ma}} \right)^{m_k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G_{t1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + G_{t2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + G_{t3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-2-60)$$

ここに、 $G_{t1}$ 、 $G_{t2}$ 、 $G_{t3}$ は次式で与えられる。

$$G_{t1} = 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{dF}{d\gamma} (\gamma_{\theta_i} + (\gamma_{\theta_i})_{st}) \cos^2 \theta_i \Delta \theta \quad (2-2-61)$$

$$G_{t2} = 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{dF}{d\gamma} (\gamma_{\theta_i} + (\gamma_{\theta_i})_{st}) \cos \theta_i \sin \theta_i \Delta \theta \quad (2-2-62)$$

$$G_{t3} = 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{dF}{d\gamma} (\gamma_{\theta_i} + (\gamma_{\theta_i})_{st}) \sin^2 \theta_i \Delta \theta \quad (2-2-63)$$

このようにして得られた $[D_t]$ を $\partial\{\sigma'\}/\partial\{\varepsilon\}$ として用いる。なお、 $dF/d\gamma$ の具体的な形は、次項で示す。

#### (4) 多重せん断ばねによるモデル化

##### (a) せん断強度と初期せん断剛性

多重せん断ばねのばね変位 $\gamma$ からばね力を算定する関数 $F(\gamma)$ を、次式により定義する。

$$x = \gamma / \gamma_m \quad (2-2-64)$$

$$y = F(\gamma) / F_m \quad (2-2-65)$$

但し、

$$F_m = \frac{l}{4} \tau_f \quad (2-2-66)$$

$$\gamma_m = \frac{F_m}{G_0} \pi \quad (2-2-67)$$

$x$  と  $y$  は正規化されたばね変位とばね力である<sup>補遺 2-6</sup>。両者の関係は双曲線型であり、その具体的な形は後述する。

$\tau_f$  はせん断強度であり、また  $G_0$  は初期せん断剛性であって、過剰間隙水圧モデルを適用する場合には、過剰間隙水圧モデルにより決まる値を用いる ((2-2-39)式, (2-2-40)式参照)。過剰間隙水圧モデルを適用しない場合は、それぞれ以下に示すように与える。

$$\tau_f = |Y| \sin \phi'_f \quad (2-2-68)$$

$$G_0 = G_{ma} \left( \frac{Y}{Y_{ma}} \right)^{m_G} \quad (2-2-69)$$

なお、

$$Y = -\sigma'_m \quad (2-2-70)$$

$$Y_{ma} = -\sigma'_{ma} \quad (2-2-71)$$

ここに、 $\sigma'_{ma}$  は基準平均有効応力、 $G_{ma}$  はこの有効応力に対応する初期せん断剛性である。 $m_G$  は  $G_0$  の拘束圧依存性を表すパラメータである。

## (b) 正規化されたばね力とばね変位の関係

(2-2-64)～(2-2-65)式における正規化されたばね変位  $x$  とばね力  $y$  の関係 (図 2-2-4参照) を以下に示す。

### ① Back Bone 上 (骨格曲線上)

$$y = \frac{x}{1+|x|} \quad (2-2-72)$$

### ② Back Bone 上の $(x_l, y_l)$ で反転後

骨格曲線に相以であり、かつその原点を最後に反転した点  $(x_r, y_r)$  (図 2-2-4の 1、2 または 3 の点) におき、さらに、骨格曲線からの反転を第 1 回目とすると、奇数回目の反転で  $(-x_l, -y_l)$ 、偶数回目の反転で  $(x_l, y_l)$  を目指す曲線を用いて、 $x$  と  $y$  の間の関係を表す。すなわち、

$$\frac{y' - y_r'}{2\delta} = \frac{\frac{x' - x_r'}{2\delta}}{1 + \left| \frac{x' - x_r'}{2\delta} \right|} \quad (2-2-73)$$

但し、減衰を調節するため、次のような変換を行ったので、上式は、 $x$ - $y$ 平面においては骨格曲線と相以にはならない補遺 2-7。

$$\left. \begin{aligned} x' &= x / \xi(x_l) \\ y' &= y / \eta(x_l) \end{aligned} \right\} \quad (2-2-74)$$

$$\left. \begin{aligned} x_r' &= x_r / \xi(x_l) \\ y_r' &= y_r / \eta(x_l) \end{aligned} \right\} \quad (2-2-75)$$

$\xi(x_l)$ の定め方は次項に示す。また、 $\delta$ は、(2-2-73)式が表す曲線が $(-x_l', -y_l')$ または $(x_l', y_l')$ を通るという条件から、次のように定まる。

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left| \pm x_l' - x_r' \right| \cdot \left| \pm y_l' - y_r' \right|}{\left| (\pm x_l' - x_r') - (\pm y_l' - y_r') \right|} \quad (2-2-76)$$

式中の複号は、奇数回目の反転をしたら－、偶数回目の反転をしたら＋とする。

第1回目の反転では、Masing 則 (Masing, 1926) に従い、 $\delta = 1$  としたい。この条件から、 $\eta(x_l)$  が次のように定まる。

$$\eta(x_l) = \frac{\xi(x_l) + |x_l|}{1 + |x_l|} \quad (2-2-77)$$

### ③ Back Bone にもどった場合

$x$ と $y$ との関係は、再び(2-2-72)式による。

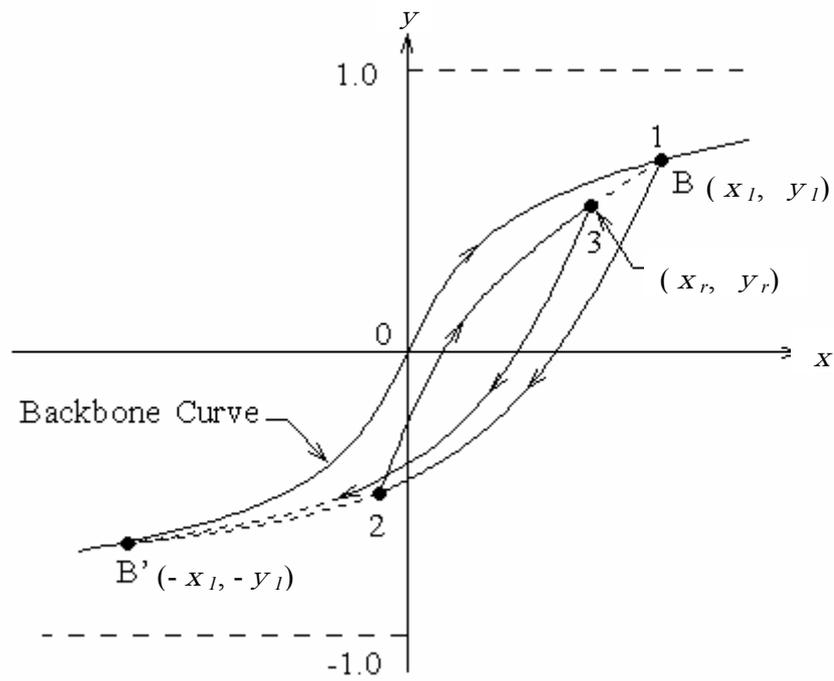


図 2-2-4 正規化されたばね変位-ばね力空間での除荷/載荷曲線の模式図<sup>3)</sup> (Iai ら, 1990)

(c) ばね力ーばね変位関係の勾配

次に  $dF(\gamma)/d\gamma$  を求める。まず、骨格曲線上でない場合は、(2-2-73)式の関係を用い、次式を得る。

$$\frac{dF}{d\gamma} = \frac{F_m}{\gamma_m} \cdot \frac{\eta(x_l)}{\xi(x_l)} \cdot \frac{dy'}{dx'} \quad (2-2-78)$$

なお、 $dy'/dx'$  は次式のように表される。

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{1 - \left| \frac{y' - y_r'}{2\delta} \right|}{1 + \left| \frac{x' - x_r'}{2\delta} \right|} \quad (2-2-79)$$

骨格曲線上である場合は、上式において、 $\eta(x_l)=1$ 、 $\xi(x_l)=1$ 、 $\delta=0.5$ 、 $x_r'=y_r'=0$  とした特別の場合である。すなわち、

$$\frac{dF}{d\gamma} = \frac{F_m}{\gamma_m} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (2-2-80)$$

ここで、 $dy/dx$  は次式のように表される。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - |y|}{1 + |x|} \quad (2-2-81)$$

(5) 減衰定数のモデル化

各ばねの除荷時に、当該ばねの変位  $x$  に応ずる減衰定数を  $h(x)$  と置く。減衰を調節するために、(2-2-74)式と(2-2-75)式で導入した  $\xi(x)$  は、 $h(x)$  に基づき、次式を数値的に解いて求める (Ishihara ら, 1985)。

$$D(x/\xi) = h(x) \quad (2-2-82)$$

但し、

$$D(x) = \frac{4}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{|x|} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{|x|} \ln(1 + |x|) \right\} - \frac{2}{\pi} \quad (2-2-83)$$

減衰定数  $h(x)$  の具体的な表示を以下に示す。

等方圧密された状態からせん断力  $\tau_{xy}$  を加えて、せん断ひずみ  $\gamma_{xy}$  ( $=x\gamma_m$ ) を得たものとする。この状態で除荷し、反対側で骨格曲線到達後に荷重を反転させ、再びもとの状態にもどるようなループを考える。

除荷開始時点における各ばねの変位は、

$$x \sin \theta_i \gamma_m \quad (2-2-84)$$

であり、また各ばね力は、すべてのばねが骨格曲線上にあることから、

$$y_0(x \sin \theta_i) F_m \Delta \theta \quad (2-2-85)$$

で与えられる。但し、

$$y_0(x) = x / (1 + |x|) \quad (2-2-86)$$

である。これらを用い、各ばねのひずみエネルギーを次式により定める。

$$e_i(x) \gamma_m F_m \Delta \theta \quad (2-2-87)$$

但し、

$$e_i(x) = \frac{1}{2} y_0(x \sin \theta_i) x \sin \theta_i = \frac{1}{2} \frac{x^2 \sin^2 \theta_i}{1 + |x \sin \theta_i|} \quad (2-2-88)$$

各ばねのループ 1 回当りの減衰エネルギーは、

$$e_i(x) \gamma_m F_m \Delta \theta h(x \sin \theta_i) \cdot 4\pi \quad (2-2-89)$$

で与えられ、したがって全ばねの減衰定数  $H(x)$  は、次式で表示される。

$$H(x) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2 \sum_{i=1}^{2n} e_i(x) \gamma_m F_m \Delta \theta h(x \sin \theta_i) \cdot 4\pi}{2 \sum_{i=1}^{2n} e_i(x) \gamma_m F_m \Delta \theta} = \frac{\sum_{i=1}^{2n} e_i(x) h(x \sin \theta_i)}{\sum_{i=1}^{2n} e_i(x)} \quad (2-2-90)$$

ここで個々のばねの減衰定数を与える式  $h(x)$  が次の形に表されるものとする<sup>6)</sup> (Ozutsumi ら, 2001)。

$$h(x) = \sum_k E_k \frac{|x| / \tau_k}{1 + |x| / \tau_k} \quad (2-2-91)$$

すなわち、各ばねの減衰定数  $h(x)$  は双曲線型関数  $(E_k (|x| / \tau_k) / (1 + |x| / \tau_k))$  の重ね合わせとして表現する。この関数は  $x$  が概ね  $\tau_k / 10 \sim 10 \tau_k$  の範囲で値が 0 から  $E_k$  に変化するので、立ち上がりのタイミング  $\tau_k$  をずらして関数を重ね合わせれば、任意の単調増加関数が近似出来る。 $E_k$  の値は以下に示す方法により決定する。

(2-2-91)式を用いると、全ばねの減衰定数  $H(x)$  は次式により表される。

$$H(x) = \sum_k \zeta_k(x) E_k \quad (2-2-92)$$

但し、

$$\zeta_k(x) = \frac{\sum_i e_i(x) \frac{|x \sin \theta_i| / \tau_k}{1 + |x \sin \theta_i| / \tau_k}}{\sum_i e_i(x)} \quad (2-2-93)$$

とおいた。

一方、全ばねの減衰定数は、経験的に、例えば

$$\tilde{H}(x) = H_{max} \frac{\left| \frac{\pi}{4} x \right|}{1 + \left| \frac{\pi}{4} x \right|} \quad (2-2-94)$$

で与えられる。 $H(x)$ が $\tilde{H}(x)$ をよく近似するよう、最小二乗法を用いてパラメータ  $E_k$  を決定する。すなわち残差平方和  $I$  を、

$$I = \sum_m \left( H(x_m) - \tilde{H}(x_m) \right)^2 \quad (2-2-95)$$

とおき、さらに

$$\frac{\partial I}{\partial E_k} = 0 \quad (2-2-96)$$

なる条件を用いて  $E_k$  を決定する。すなわち、

$$\frac{\partial I}{\partial E_k} = \sum_m \left[ 2 \left( H(x_m) - \tilde{H}(x_m) \right) \cdot \zeta_k(x_m) \right] \quad (2-2-97)$$

$$= 2 \left\{ \sum_j \left( \sum_m \zeta_k(x_m) \zeta_j(x_m) \right) E_j - \left( \sum_m \tilde{H}(x_m) \zeta_k(x_m) \right) \right\} = 0 \quad (2-2-98)$$

上式を整理すると、次の連立方程式を得る。

$$\sum_j a_{kj} E_j = b_k \quad (2-2-99)$$

但し、

$$a_{kj} = \sum_m \zeta_k(x_m) \zeta_j(x_m) \quad (2-2-100)$$

$$b_k = \sum_m \tilde{H}(x_m) \zeta_k(x_m) \quad (2-2-101)$$

(6) 多重せん断機構モデルに必要なパラメータ

これまでに示した多重せん断機構モデルを用いる際に指定が必要なパラメータなどをまとめて表 2-2-1に示す。

表 2-2-1 多重せん断機構モデルに必要な主なパラメータの一覧

分類	パラメータ	
物理試験結果	$\rho_t$ $n$	湿潤密度（地下水位以深では飽和密度） 間隙率
動の変形特性	$\sigma_{ma}'$ $G_{ma}$ $K_{ma}$ $m_G$ $m_K$ $\phi_f$ $h_{max}$	$G_{ma}$ , $K_{ma}$ に対応する平均有効応力（基準拘束圧） 基準初期せん断剛性（ $\sigma_m' = \sigma_{ma}'$ における値） 基準体積弾性係数（接線剛性）（ $\sigma_m' = \sigma_{ma}'$ における値） 初期せん断剛性 $G_0$ の有効拘束圧依存性 体積弾性係数 $K_0$ の有効拘束圧依存性 せん断抵抗角 履歴減衰定数の上限値
液状化特性	$\phi_p$ $w_1$ $p_1$ $p_2$ $c_1$ $S_1$	変相角 液状化の全体の挙動を規定するパラメータ 液状化の前半の挙動を規定するパラメータ 液状化の後半の挙動を規定するパラメータ 液状化するためのせん断応力比の下限値に関するパラメータ 液状化の終局状態を規定するパラメータ

※1 平均有効応力  $\sigma_m'$  に対する初期せん断剛性  $G_0$  および体積弾性係数（接線剛性） $K_0$  は次式により評価される。

$$G_0 = G_{ma} \left( \sigma_m' / \sigma_{ma}' \right)^{m_G}, \quad K_0 = K_{ma} \left( \sigma_m' / \sigma_{ma}' \right)^{m_K}$$

※2  $w_1, p_1, p_2, c_1, S_1$  を液状化パラメータと呼ぶ。

上記のパラメータを用いた応力の計算例を補遺 2-8に示す。

<2-2 節の参考文献>

- 1) Towhata,I. and Ishihara,K.: Modelling Soil Behavior under Principal Stress Axes Rotation, Proc. of 5th International Conf. on Num. Methods in Geomechanics, Nagoya, Vol.1, pp. 523-530, 1985.
- 2) Ishihara,K., Yoshida,N. and Tsujino,S.: Modelling of stress-strain relations of soils in cyclic loading, Proc. of 5th International Conf. on Num. Methods in Geomechanics, Nagoya, Vol.1, pp. 373-380, 1985.
- 3) Iai,S., Matsunaga,Y. and Kameoka,T.: Parameter Identification for a Cyclic Mobility Model, Rep. of the Port and Harbour Res. Inst. Vol.29, No.4, pp.57-83, 1990.
- 4) Towhata,I. and Ishihara,K.: Shear Work and Pore Water Pressure in Undrained Shear, Soils and Foundations, Vol.25, No.3, pp.73-84, 1985.
- 5) Iai,S., Matsunaga,Y. and Kameoka,T.: Strain space plasticity model for cyclic mobility, Report of Port and Harbour Research Institute, Vol.29, No.4, pp.27-56, 1990.
- 6) Ozutsumi,O. and Iai,S.: Adjustment Method of the Hysteresis Damping for Multiple Shear Spring Model, Proc. of 4th International Conf. on Recent Advances in Geotech. Earthquake Eng. and Soil Dynamics, 2001.

## <補遺>\*

### 補遺2-1 土のモデル構築の視点

土のモデルを構築するにあたってのいくつかの重要な視点が示されている(東畑、1992<sup>7)</sup>)。その視点は、5つあり、それらは、①G/Go および  $h$  と  $\gamma$  の再現性が室内試験結果と整合すること、②決定すべき土質パラメータの数はせいぜい5個程度であること、③異方性が考慮できること、④主応力軸回転の影響が考慮できること、⑤モデルは座標軸等の設定等に依存しない客観的なものであること、である。

これらの内、①と②については、動的解析の実務では最低限満足すべきと思われる視点である。③の異方性については、土は堆積過程等の影響で固さや強さが载荷の方向によって異なる性質を有するから、取り扱おうとする土にこのような性状が定量的に把握されている場合は、考慮すべき特性である。⑤の客観性は、2次元あるいは3次元の FEM 等の数値計算にモデルを取り込む際には欠かせない視点である。④の主応力軸回転の影響については、異方性に関連する性質である。重要な性質でありながら実務的には陽には現れず、ややなじみが薄い性質なので、文献<sup>7)</sup>を参照しながら以下に示す。

土に異方性という性質があると、主応力がどちら向きに作用するかでそのときの土の固さや強さが異なってくる。常時における荷重の方向は鉛直下向きであるので、最大主応力の方向は鉛直である。ここで、何らかの要因で水平面にせん断応力が作用すると、主応力の方向は傾く。地震のように繰り返しせん断応力が作用する場合は、主応力の方向が繰り返し変化する。これは、主軸の回転と呼ばれている。このような現象が起こると以下のような性質が現れる<sup>7)</sup>。

- ・ ある方向に主応力が作用しているときにはその方向に変形し、同時に変形に対する抵抗・免疫のようなものができる。
- ・ したがって、以降、再び同じ方向に载荷されたときには、土は固い。しかし、この免疫はこの方向にしか効き目がなく、ほかのかけ離れた方向に载荷されたときは、土はむしろやわらかい。
- ・ 新しい载荷方向に変形すると新しい免疫が生まれ、古い免疫は消えてしまう。

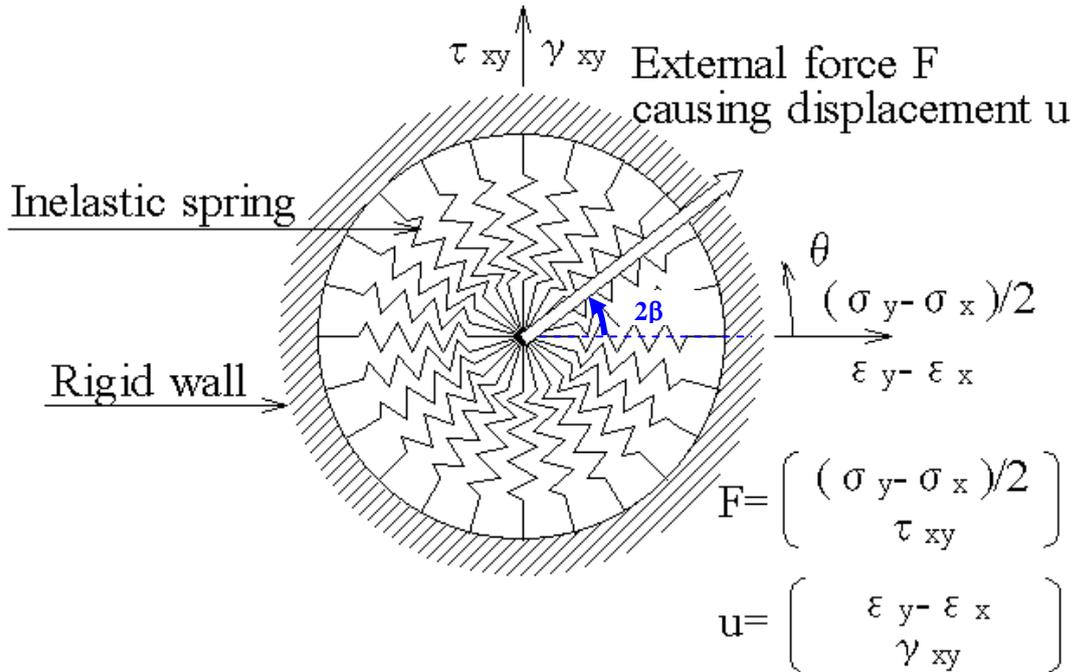
このような性質を考慮できる構成モデルが望ましいとされている。

Towhata ら(1985)は、砂質土の繰り返し载荷時の挙動をモデル化するため、平面ひずみ状態における排水条件下の砂のせん断応力-せん断ひずみ関係について検討を加え、異方性や主応力軸回転の影響を容易に考慮でき、かつ、座標軸等の設定に依存しない客観的なモデルとして多重せん断ばねモデルを提案した。この多重せん断ばねモデルは、従来の2次元 FLIP のマルチスプリング要素はもとより、3次元 FLIP や、最近のカクテルグラスモデル要素にも、せん断の挙動を表現する基本モデルとして考慮されている。

補遺2-2 多重せん断ばねモデルにおける主応力軸回転の影響の考慮について<sup>7)</sup>

この多重せん断ばねモデルは力学的なアナロジーである。多重せん断ばねモデルは、補図 2-1 に示すように、半径が十分に大きい（正確には無限大の）固定の円とその円内にある可動点とから構成される。可動点は、無数の非線形ばねにより、固定された円と結ばれている。ここに外力が作用すると、可動点は変位する。図に示したせん断応力、または、せん断ひずみの空間において座標軸を設け、外力の横座標・縦座標が  $\{(\sigma_y - \sigma_x) / 2, \tau_{xy}\}$  を表し、変位の横座標・縦座標が  $\{\varepsilon_y - \varepsilon_x, \gamma_{xy}\}$  を意味すると約束している。

このモデルは、ばね毎に異なる固さや強さを与えれば異方性を考慮することもできる。また、主応力の向きについても定量的に考慮されている。すなわち、モールの応力円によれば、x 軸から計った最大主応力  $\sigma_1$  の向き  $\beta$  の 2 倍の角度は、 $\arctan \{2\tau_{xy} / (\sigma_y - \sigma_x)\}$  で与えられ、補図2-1に示した外力の向きの  $2\beta$  に一致する。主応力軸の回転は、図中で外力の向きが回転することに相当する。そのときのばねがそれぞれの方向に応じて変形することにより、このモデルは、主応力軸の回転により引き起こされる土の異方性の影響を自動的に考慮に入れることができる。



補図2-1 多重せん断ばねモデル (Towhata ら, 文献1)に加筆)

補遺2-3 平均有効応力と平均弾性ひずみの関係における積分形への変換について（式の誘導）

積分形への変換について式の誘導を示す。

$Y$  は平均有効応力  $\sigma_m'$  の符号を反転して圧縮を正としたもの、 $X$  は体積弾性ひずみの符号を反転したものであり、初期圧密前の状態 ( $\sigma_m'=0$ ) を基準とした体積ひずみである。

ここで定義した  $X$  と  $Y$  との間に次の関係を仮定する。

$$\Delta Y = K \Delta X \quad (\text{補 2-1})$$

但し、 $K$  は増分型の体積弾性係数であり、次式により与えられるものとする。

$$K = K_{ma} \left( \frac{Y}{Y_{ma}} \right)^{m_K} \quad (m_K \neq 1) \quad (\text{補 2-2})$$

なお、 $K_{ma}$  は平均有効応力が  $\sigma_{ma}'$  (基準平均有効拘束圧) である時の増分型の体積弾性係数である。 $m_K$  は  $K$  の拘束圧依存性を表すパラメータである。また、 $Y_{ma}$  は次式で与えられる。

$$Y_{ma} = -\sigma_{ma}' \quad (\text{補 2-3})$$

(補 2-1)式を以下のように変形する。

$$\frac{1}{K} \Delta Y = \Delta X \quad (\text{補 2-4})$$

さらに、上式に(補 2-2)式を代入すると、次式を得る。

$$\frac{1}{K_{ma}} \left( \frac{Y}{Y_{ma}} \right)^{-m_K} \Delta Y = \Delta X \quad (\text{補 2-5})$$

上式を積分すると、次式を得る。

$$\frac{1}{K_{ma}} \left( \frac{1}{Y_{ma}} \right)^{-m_K} \int (Y)^{-m_K} \Delta Y = \int \Delta X \quad (\text{補 2-6})$$

上式をさらに変形して、次式を得る。但し、 $C$  は積分定数である。

$$\frac{1}{K_{ma}} \left( \frac{1}{Y_{ma}} \right)^{-m_K} \frac{(Y)^{1-m_K}}{1-m_K} = X + C \quad (\text{補 2-7})$$

上式において、 $X=0$  の時  $Y=0$  とすると  $C=0$  となり、さらに  $Y$  について解くと次式を得る。

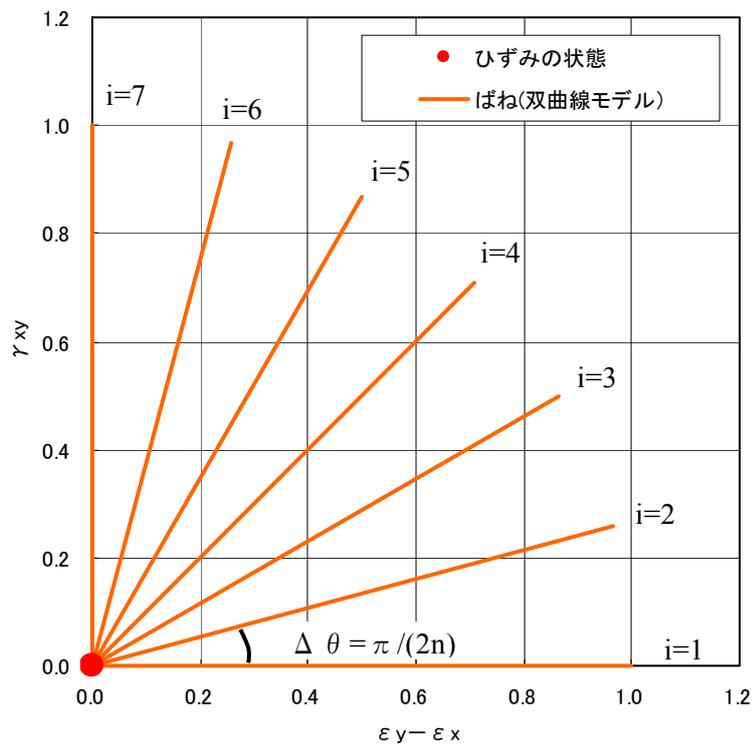
$$Y = BX^{\frac{1}{1-m_K}} \quad (\text{補 2-8})$$

但し、

$$B = \left[ (1-m_K) \frac{K_{ma}}{(Y_{ma})^{m_K}} \right]^{\frac{1}{1-m_K}} \quad (\text{補 2-9})$$

補遺2-4 多重せん断ばねの配置の例 (n=6 とした場合)

一例として、n=6 とした場合のばねの配置を補図 2-2 に示す。図では便宜的にばねを直線で示している。ばねの長さは無限大であるが、各方向の単位長さを示している。



補図2-2 多重せん断ばねモデル (1/4 円のばねの数 n=6 の場合)

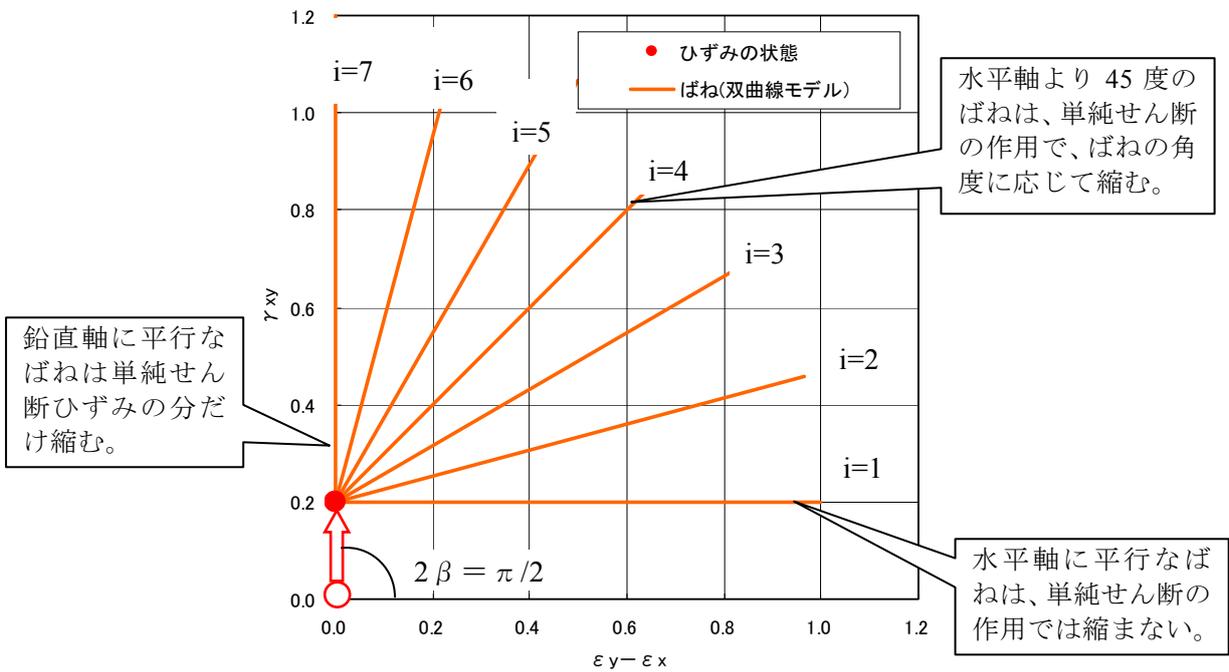
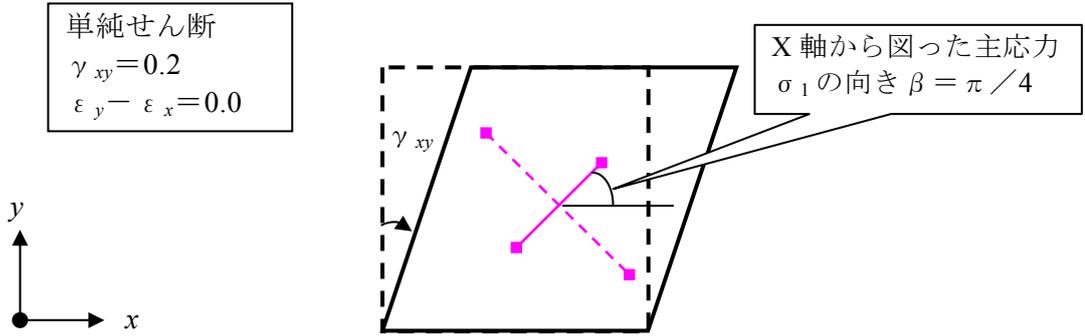
## 補遺2-5 多重せん断ばねのせん断応力-せん断ひずみ関係

多重せん断ばねのせん断応力-せん断ひずみ関係 ((2-2-46)式および(2-2-47)式) において、 $i$  を 1 から  $2n$  まで加算して、さらに 2 倍している。これは、まず、各ばねによる力をマルチスプリング要素の半円分 ( $i=1\sim 2n$ ) を合計し、さらに 180 度反対側のばねの作用を考慮するために 2 倍したものである。

ばねの変位  $\gamma_{\theta i}$  は、ばね軸方向の変位である。単純せん断が生じた場合は、マルチスプリングの中心点 (ばねが集中している点) は、ひずみ座標の  $\gamma_{xy}$  軸上を移動する。このとき  $\gamma_{xy}$  軸に平行なばねにおいては、 $\theta i = \pi / 2$  であるから、式を見てわかるとおり、 $\gamma_{\theta i} = \gamma_{xy}$  となる。

一例として、マルチスプリングの 1/4 円あたりのばねの本数  $n=6$  として、単純せん断  $\gamma_{xy}=20\%$  を発生させた場合の各ばね変位の値を補図 2-3 に、軸差せん断  $\varepsilon_y - \varepsilon_x = 20\%$  の場合の図を補図 2-4 に、それぞれ数値とともに示す。便宜上、マルチスプリングは中心の可動点から途中の点までを示しているが、モデル上、ばねそのものの長さは無限大である。これを見てわかるとおり、単純せん断の場合でも、マルチスプリングでは単純せん断と軸差せん断の中間的な位置のばねも変位することがわかる。

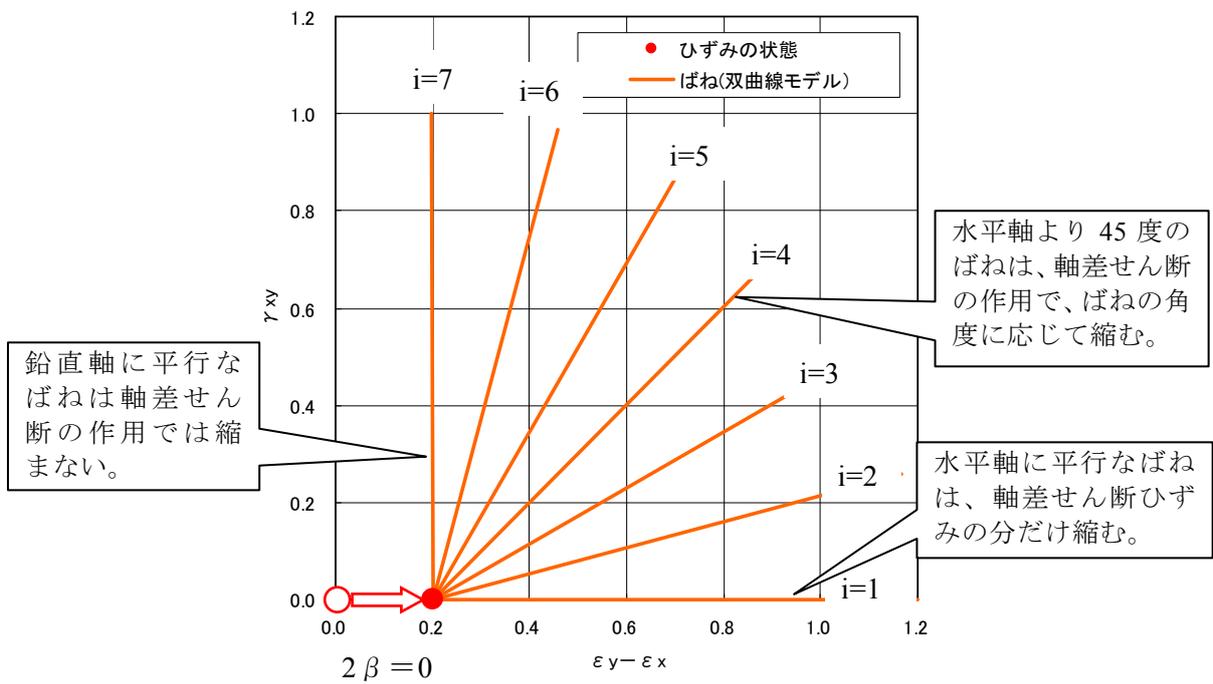
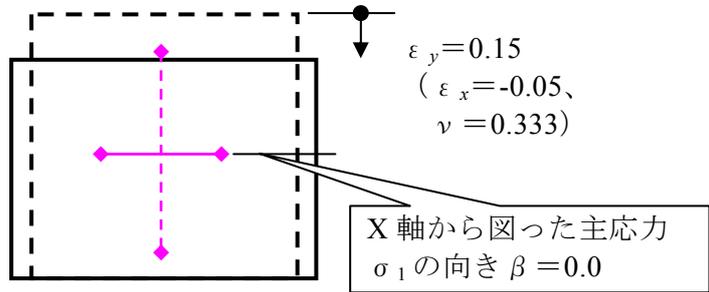
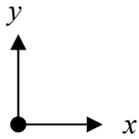
尚、マルチスプリング要素では、ばねの中心点の移動を表すベクトル (図中の赤矢印) の水平軸との角度  $2\beta$  は、 $x$  軸から図った主応力軸の角度  $\beta$  を表すことになるが、その概念的な主応力軸を図中に示している。



i	$\theta_i$ (rad)	$\cos \theta_i$	$\sin \theta_i$	$\gamma_{\theta i}$
1	0.000	1.0000	0.0000	0.00E+00
2	0.262	0.9659	0.2588	5.18E-02
3	0.524	0.8660	0.5000	1.00E-01
4	0.785	0.7071	0.7071	1.41E-01
5	1.047	0.5000	0.8660	1.73E-01
6	1.309	0.2588	0.9659	1.93E-01
7	1.571	0.0000	1.0000	2.00E-01

補図2-3 各ばねの変位  $\gamma_{\theta i}$  の計算例 (単純せん断)

軸差せん断  
 $\gamma_{xy} = 0.0$   
 $\varepsilon_y - \varepsilon_x = 0.2$



i	$\theta_i$ (rad)	$\cos \theta_i$	$\sin \theta_i$	$\gamma_{\theta_i}$
1	0.000	1.0000	0.0000	2.00E-01
2	0.262	0.9659	0.2588	1.93E-01
3	0.524	0.8660	0.5000	1.73E-01
4	0.785	0.7071	0.7071	1.41E-01
5	1.047	0.5000	0.8660	9.98E-02
6	1.309	0.2588	0.9659	5.16E-02
7	1.571	0.0000	1.0000	0.00E-00

補図2-4 各ばねの変位  $\gamma_{\theta_i}$  の計算例 (軸差せん断)

補遺2-6 ばね力やばね変位を正規化する際の係数について

多重せん断ばねのばね変位  $\gamma_{\theta i}$  からばね力を算定する関数  $F(\gamma_{\theta i})$  を、次式により定義する。本項では、以下便宜的に、 $\gamma_{\theta i}$  を  $\gamma$ 、 $x_{\theta i}$  を  $x$ 、 $y_{\theta i}$  を  $y$  など、 $\theta i$  を省略して示している。

$$x = \gamma / \gamma_m \quad (\text{補 2-10})$$

$$y = F(\gamma) / F_m \quad (\text{補 2-11})$$

但し、

$$F_m = \frac{l}{4} \tau_f \quad (\text{補 2-12})$$

$$\gamma_m = \frac{F_m}{G_0} \pi \quad (\text{補 2-13})$$

$x$  と  $y$  は正規化されたばね変位とばね力である。両者の関係は双曲線型である。 $\tau_f$  はせん断強度であり、また  $G_0$  は初期せん断剛性であって、過剰間隙水圧モデルを適用する場合には、過剰間隙水圧モデルにより決まる値を用いる。

例えば、単純せん断ひずみ  $\gamma_{xy}$  が作用した場合を考えると、次式を得る。

$$\tau_{xy} = 2 \int_0^\pi F(\gamma) \sin \theta d\theta \quad (\text{補 2-14})$$

$\gamma = \gamma_{xy} \sin \theta$  である。ここで、 $\gamma_{xy} \rightarrow \infty$  とすると、 $F(\gamma)$  は、 $\theta = 0$  の一点を除き、 $F_m$  に等しくなる。なぜなら、(2-2-72)式によれば、 $x \rightarrow \infty$  とすると、 $y \rightarrow 1$  となるので、(補 2-11)式によれば、 $F(\gamma)$  は  $F_m$  に等しくなる。従って、次式を得る。

$$\tau_f = 2F_m \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4F_m \quad (\text{補 2-15})$$

故に、(補 2-12)式が成り立つ。

次に、例えば、微小な単純せん断ひずみ  $\gamma_{xy}$  が作用した場合の初期せん断剛性  $G_0 = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_{xy}}$  を算定する。(補 2-14)式を  $\gamma_{xy}$  で微分すると、次式を得る。

$$G_0 = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_{xy}} = 2 \int_0^\pi \frac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma} \sin^2 \theta d\theta \quad (\text{補 2-16})$$

ここで、 $\gamma_{xy} \rightarrow 0$  とすると、 $\partial F(\gamma) / \partial \gamma \rightarrow q_0$  となる。 $q_0$  は各仮想せん断ばねの初期剛性で

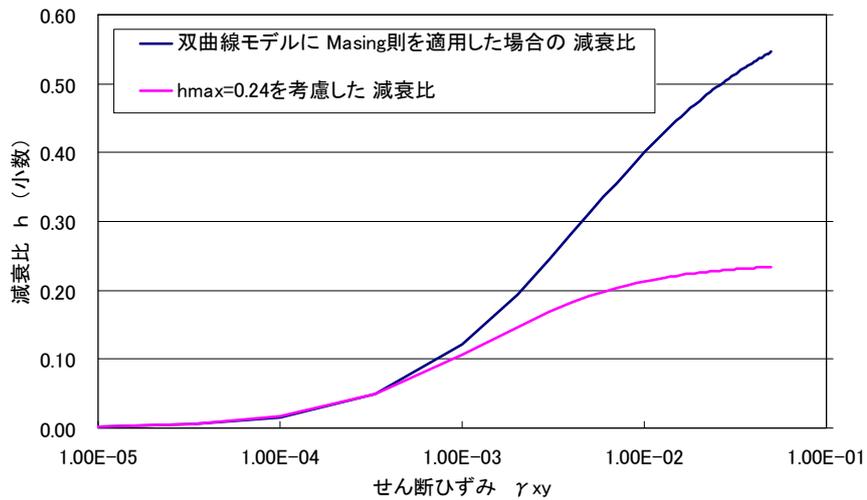
ある。この状態で上式の積分を実行すると、次式を得る。

$$G_0 = 2q_0 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \pi \frac{F_m}{\gamma_m} \quad (\text{補 2-17})$$

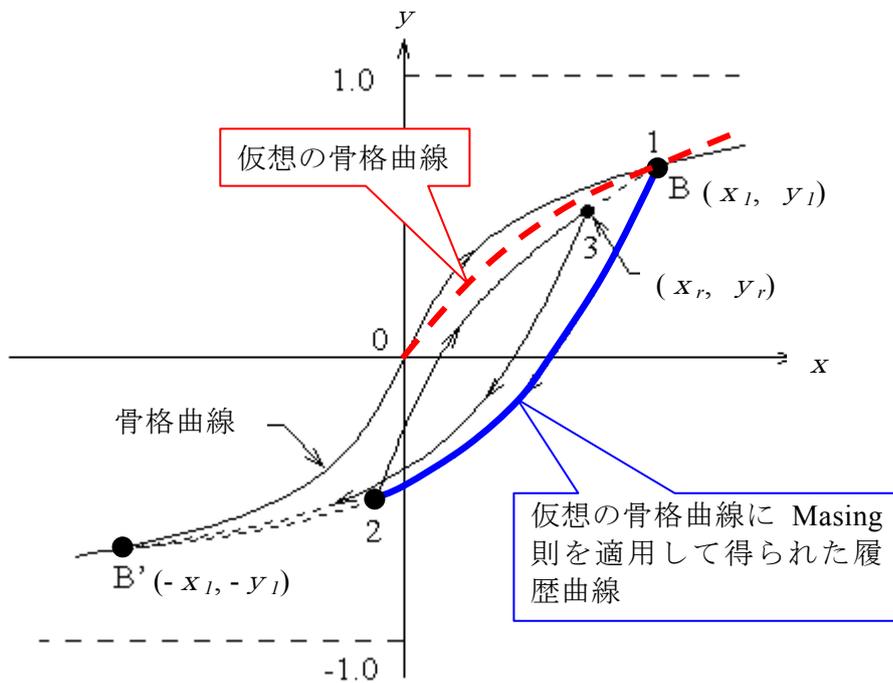
故に、(補 2-13)式が成り立つ。

補遺2-7 履歴減衰の調整の考え方

双曲線モデルの骨格曲線を Masing 則により描かれた履歴の減衰は、補図 2-5 に示すように 50%を超え、実験値より  $h_{max}$  を仮定して設定した減衰に比べて大きすぎる結果を与える。そこで、計算上の履歴曲線が、実験値に即した履歴減衰を与えるように調整する。



補図2-5 双曲線モデルに Masing 則を適用した場合の減衰と  $h_{max}$  を考慮した実際の減衰の例



補図2-6 履歴モデルの改良法の概念

減衰を調整するための基本的な考え方の概念図を補図2-6に示す。すなわち、これに示すように、実際の骨格曲線とは異なる仮想の骨格曲線を考え、これにMasing則を適用しようというものである。仮想の履歴曲線は、最低限、①除荷点を通る、②Masing則を適用して得られる履歴曲線の減衰定数が実材料の減衰定数になっている、の二つの条件を満たすようにしている。上記の①と②を満たす骨格曲線は数式の形として得ることはできないので、数値解析的に求めることとしている。

FLIP の中では、上記を求める数値的な解法は、以下のようにして行っている。

- ① 例えば、単純せん断ひずみを1サイクル変化させたとした場合の多重せん断ばねモデルによる全ばねの減衰定数  $H(x)$  を個々のばねの減衰定数  $h(x)$  により表現可能なようあらかじめ準備しておく。ここに、 $x$  は単純せん断ひずみを1サイクルまわした際の正規化されたばね変位の最大値：(2-2-90)式等
- ② 利用者が指定した  $H_{\max}$  とその時のせん断ひずみから、本来あるべき減衰定数  $\tilde{H}(x)$  を算定する。ここに  $x$  はその時点での正規化された最大のばね変位：(2-2-94)式
- ③ 多重せん断ばねモデルによる全ばねの減衰定数  $H(x)$  が  $\tilde{H}(x)$  をよく近似するよう、個々のばねの減衰定数  $h(x)$  を具体的に設定する。：(2-2-91)式および(2-2-99)式
- ④ 個々のばねの減衰定数  $h$  に基づいて、減衰を調節するために、(2-2-74)式と(2-2-75)式で導入した  $\xi(x)$  は、(2-2-82)式を数値的に解いて求める。具体的には、(2-2-82)式で  $h(x)$  を与えて  $x/\xi$  の値を変動させて、はさみうち法により  $x/\xi$  を求め、それより  $\xi$  の値を求める。

## 補遺2-8 多重せん断ばねを用いた応力の計算例

多重せん断ばねモデルによる応力の試計算を行った。試計算のために設定した土のパラメータを補表 2-1に示す。単純せん断ひずみ  $\gamma_{xy}=1.0\times 10^{-4}\%$ 、および 20%の場合の応力の計算結果を補表 2-2、補表 2-3に、軸差ひずみ  $\varepsilon_y - \varepsilon_x=1.0\times 10^{-4}\%$ 、および 20%の場合の応力の計算結果を補表 2-4、補表 2-5に示す。ひずみ 20%の計算結果は、前述の補図 2-3、補図 2-4 のばねの状態の条件に対応している。表には応力を計算する過程のせん断ばねの変位等も示している。

ひずみが  $1.0\times 10^{-4}\%$ 、の際の応力は、線形を仮定して求めた応力と同様であることがわかる。ひずみ 20%の応力はほとんど強度に近い値となることがわかる。

補表2-1 応力の試計算のための土のパラメータ

項目	値	単位	備考
質量密度 $\rho_t$	1.9	(t/m <sup>3</sup> )	
初期せん断波速度 Vs	150	(m/sec)	
基準せん断剛性 $G_{ma}$	42750	(kPa)	
$m_G$	0.5		
基準拘束圧 $\sigma_{ma}'$	-98	(kPa)	(圧縮：負)
内部摩擦角 $\phi_f$	40	°	
最大減衰比 $h_{max}$	0.24	(無次元)	
平均有効応力 $\sigma_m'$	-73.5	(kPa)	(圧縮：負)
垂直応力 $\sigma_x'$	-49	(kPa)	
垂直応力 $\sigma_y'$	-98	(kPa)	
静止土圧係数 Ko	0.5	(無次元)	
せん断剛性 Go	37023	(kPa)	
強度 $\tau_f$	47.2	(kPa)	
$F_m=1/4 \tau_f$	11.8	(kPa)	
$\gamma_m=F_m/Go \times \pi$	$1.00 \times 10^{-3}$		
$\gamma_r=\tau_f/Go$	$1.28 \times 10^{-3}$	(無次元)	

補表2-2 多重せん断ばねモデルによる応力の算定例（単純せん断、 $\gamma_{xy}=1.0 \times 10^{-4}\%$ ）

i	$\theta_i$ (rad)	$\cos \theta_i$	$\sin \theta_i$	$\gamma_{\theta i}$	$x = \gamma_{\theta i} / \gamma_m$	$y = x / (1 + \text{abs}(x))$	$F(\gamma_{\theta i})$	$F(\gamma_{\theta i}) \times \cos \theta_i \Delta \theta$	$F(\gamma_{\theta i}) \times \sin \theta_i \Delta \theta$
1	0.000	1.0000	0.0000	0.00E+00	0.000	0.00000	0.00	0.0000	0.0000
2	0.262	0.9659	0.2588	2.59E-07	0.000	0.00026	0.00	0.0008	0.0002
3	0.524	0.8660	0.5000	5.00E-07	0.000	0.00050	0.01	0.0013	0.0008
4	0.785	0.7071	0.7071	7.07E-07	0.001	0.00071	0.01	0.0015	0.0015
5	1.047	0.5000	0.8660	8.66E-07	0.001	0.00086	0.01	0.0013	0.0023
6	1.309	0.2588	0.9659	9.66E-07	0.001	0.00096	0.01	0.0008	0.0029
7	1.571	0.0000	1.0000	1.00E-06	0.001	0.00100	0.01	0.0000	0.0031
8	1.833	-0.2588	0.9659	9.66E-07	0.001	0.00096	0.01	-0.0008	0.0029
9	2.094	-0.5000	0.8660	8.66E-07	0.001	0.00086	0.01	-0.0013	0.0023
10	2.356	-0.7071	0.7071	7.07E-07	0.001	0.00071	0.01	-0.0015	0.0015
11	2.618	-0.8660	0.5000	5.00E-07	0.000	0.00050	0.01	-0.0013	0.0008
12	2.880	-0.9659	0.2588	2.59E-07	0.000	0.00026	0.00	-0.0008	0.0002
13	3.142	-1.0000	0.0000	1.23E-22	0.000	0.00000	0.00	0.0000	0.0000
							合計の2倍	0.000	0.037

$$\frac{(\sigma_y' - \sigma_x')}{2} \quad \tau_{xy}$$

(kPa)                      (kPa)

注) 初期せん断剛性×せん断ひずみ  $\gamma_{xy} = 0.037\text{kPa}$  (線形を仮定)

補表2-3 多重せん断ばねモデルによる応力の算定例（単純せん断、 $\gamma_{xy}=20\%$ ）

i	$\theta_i$ (rad)	$\cos \theta_i$	$\sin \theta_i$	$\gamma_{\theta i}$	$x = \gamma_{\theta i} / \gamma_m$	$y = x / (1 + \text{abs}(x))$	$F(\gamma_{\theta i})$	$F(\gamma_{\theta i}) \times \cos \theta_i \Delta \theta$	$F(\gamma_{\theta i}) \times \sin \theta_i \Delta \theta$
1	0.000	1.0000	0.0000	0.00E+00	0.000	0.00000	0.00	0.0000	0.0000
2	0.262	0.9659	0.2588	5.18E-02	51.647	0.98101	11.59	2.9301	0.7851
3	0.524	0.8660	0.5000	1.00E-01	99.775	0.99008	11.69	2.6513	1.5307
4	0.785	0.7071	0.7071	1.41E-01	141.103	0.99296	11.73	2.1711	2.1711
5	1.047	0.5000	0.8660	1.73E-01	172.815	0.99425	11.74	1.5372	2.6625
6	1.309	0.2588	0.9659	1.93E-01	192.751	0.99484	11.75	0.7962	2.9714
7	1.571	0.0000	1.0000	2.00E-01	199.550	0.99501	11.75	0.0000	3.0768
8	1.833	-0.2588	0.9659	1.93E-01	192.751	0.99484	11.75	-0.7962	2.9714
9	2.094	-0.5000	0.8660	1.73E-01	172.815	0.99425	11.74	-1.5372	2.6625
10	2.356	-0.7071	0.7071	1.41E-01	141.103	0.99296	11.73	-2.1711	2.1711
11	2.618	-0.8660	0.5000	1.00E-01	99.775	0.99008	11.69	-2.6513	1.5307
12	2.880	-0.9659	0.2588	5.18E-02	51.647	0.98101	11.59	-2.9301	0.7851
13	3.142	-1.0000	0.0000	2.45E-17	0.000	0.00000	0.00	0.0000	0.0000
							合計の2倍	0.000	46.64

$$\frac{(\sigma_y' - \sigma_x')}{2} \quad \tau_{xy}$$

(kPa)                      (kPa)

注) せん断強度  $\tau_f = 47.2 \text{ kPa}$

補表2-4 多重せん断ばねモデルによる応力の算定例（軸差せん断、 $\varepsilon_y - \varepsilon_x = 1.0 \times 10^{-4}\%$ ）

i	$\theta_i$ (rad)	$\cos \theta_i$	$\sin \theta_i$	$\gamma_{\theta i}$	$x = \gamma_{\theta i} / \gamma_m$	$y = x / (1 + \text{abs}(x))$	$F(\gamma_{\theta i})$	$F(\gamma_{\theta i}) \times \cos \theta_i \Delta \theta$	$F(\gamma_{\theta i}) \times \sin \theta_i \Delta \theta$
1	0.000	1.0000	0.0000	9.98E-07	0.001	0.00099	0.01	0.0031	0.0000
2	0.262	0.9659	0.2588	9.64E-07	0.001	0.00096	0.01	0.0029	0.0008
3	0.524	0.8660	0.5000	8.64E-07	0.001	0.00086	0.01	0.0023	0.0013
4	0.785	0.7071	0.7071	7.05E-07	0.001	0.00070	0.01	0.0015	0.0015
5	1.047	0.5000	0.8660	4.99E-07	0.000	0.00050	0.01	0.0008	0.0013
6	1.309	0.2588	0.9659	2.58E-07	0.000	0.00026	0.00	0.0002	0.0008
7	1.571	0.0000	1.0000	6.11E-23	0.000	0.00000	0.00	0.0000	0.0000
8	1.833	-0.2588	0.9659	-2.58E-07	0.000	-0.00026	0.00	0.0002	-0.0008
9	2.094	-0.5000	0.8660	-4.99E-07	0.000	-0.00050	-0.01	0.0008	-0.0013
10	2.356	-0.7071	0.7071	-7.05E-07	-0.001	-0.00070	-0.01	0.0015	-0.0015
11	2.618	-0.8660	0.5000	-8.64E-07	-0.001	-0.00086	-0.01	0.0023	-0.0013
12	2.880	-0.9659	0.2588	-9.64E-07	-0.001	-0.00096	-0.01	0.0029	-0.0008
13	3.142	-1.0000	0.0000	-9.98E-07	-0.001	-0.00099	-0.01	0.0031	0.0000
							合計の2倍	0.037	0.000

$(\sigma_y' - \sigma_x') / 2$        $\tau_{xy}$   
 (kPa)                              (kPa)

注) 初期せん断剛性×軸差ひずみ ( $\varepsilon_y - \varepsilon_x$ ) = 0.037kPa (線形を仮定)

補表2-5 多重せん断ばねモデルによる応力の算定例（軸差せん断、 $\varepsilon_y - \varepsilon_x = 20\%$ ）

i	$\theta_i$ (rad)	$\cos \theta_i$	$\sin \theta_i$	$\gamma_{\theta i}$	$x = \gamma_{\theta i} / \gamma_m$	$y = x / (1 + \text{abs}(x))$	$F(\gamma_{\theta i})$	$F(\gamma_{\theta i}) \times \cos \theta_i \Delta \theta$	$F(\gamma_{\theta i}) \times \sin \theta_i \Delta \theta$
1	0.000	1.0000	0.0000	2.00E-01	199.051	0.99500	11.75	3.0767	0.0000
2	0.262	0.9659	0.2588	1.93E-01	192.269	0.99483	11.75	2.9714	0.7962
3	0.524	0.8660	0.5000	1.73E-01	172.383	0.99423	11.74	2.6625	1.5372
4	0.785	0.7071	0.7071	1.41E-01	140.750	0.99295	11.73	2.1711	2.1711
5	1.047	0.5000	0.8660	9.98E-02	99.526	0.99005	11.69	1.5307	2.6513
6	1.309	0.2588	0.9659	5.16E-02	51.518	0.98096	11.59	0.7851	2.9299
7	1.571	0.0000	1.0000	1.22E-17	0.000	0.00000	0.00	0.0000	0.0000
8	1.833	-0.2588	0.9659	-5.16E-02	-51.518	-0.98096	-11.59	0.7851	-2.9299
9	2.094	-0.5000	0.8660	-9.98E-02	-99.526	-0.99005	-11.69	1.5307	-2.6513
10	2.356	-0.7071	0.7071	-1.41E-01	-140.750	-0.99295	-11.73	2.1711	-2.1711
11	2.618	-0.8660	0.5000	-1.73E-01	-172.383	-0.99423	-11.74	2.6625	-1.5372
12	2.880	-0.9659	0.2588	-1.93E-01	-192.269	-0.99483	-11.75	2.9714	-0.7962
13	3.142	-1.0000	0.0000	-2.00E-01	-199.051	-0.99500	-11.75	3.0767	0.0000
							合計の2倍	46.64	0.000

$$\begin{matrix} (\sigma_y' - \sigma_x') / 2 & \tau_{xy} \\ \text{(kPa)} & \text{(kPa)} \end{matrix}$$

注) せん断強度  $\tau_f = 47.2 \text{ kPa}$

<補遺の参考文献>

- 7) 東畑郁生：「土と構造物の動的相互作用の解析法」、4.地盤の動的特性とそのモデル化、4.2 地盤材料の動的特性のモデル化、土と基礎、40-5(412)、pp.75-82, 1992.5.
- 8) Towhata,I. and Ishihara,K.: Modelling Soil Behavior under Principal Stress Axes Rotation, Proc. of 5th International Conf. on Num. Methods in Geomechanics, Nagoya, Vol.1, pp. 523-530, 1985.

\*補遺の内容は必ずしも FLIP 研究会の公式見解ではなく、この機会に集めた補足意見である。  
人により、細かいところでは意見の異なる場合もあるので注意されたい。

## 2-3 構成則の改良

本節では、前節で示した FLIP のマルチスプリング要素が依拠する構成則（多重せん断機構モデル）の改良に言及する。まず、始めに、負のダイレイタンスーへの塑性せん断仕事の寄与を見直した方法（tmp 法）に言及する。次に、細粒分が多い砂に特徴的な定常状態を表現する方法（Sus 法）に言及する。

### 2-3-1 軸差応力下での繰返しせん断挙動に対する適用性

ここでは、多重せん断機構モデル<sup>1)</sup>の軸差応力下での繰返しせん断挙動に対する適用性を検討する。多重せん断機構モデルを構成する過剰間隙水圧モデルは、前述の通り、単位体積の砂になされた塑性せん断仕事の累積値に応じて液状化の進行程度を評価する。変相線より下の応力空間でなされた塑性せん断仕事と、変相線を超えて破壊線に至るまでの応力空間においてなされた塑性せん断仕事は、それらが同じ量であっても、負のダイレイタンスーへの寄与程度は異なると予想される。しかし、変相線を越えて破壊線に至るまでの応力経路を実験的に再現して寄与程度を把握することは実験技術的に困難な部分があることから、寄与程度の違いについては不明な点が多い。前節で示した過剰間隙水圧モデルでは、変相線を超えて破壊線に至るまでの応力空間においてなされる塑性せん断仕事の負のダイレイタンスーへの寄与率は、せん断応力の増加に応じて線形に低減させ、破壊線上では 0 としている。この寄与率設定法によれば、破壊線にいくら近づいても非零の寄与係数が与えられることになる。同モデルを組み込んだ有限要素法に基づく 2 次元動的有効応力解析コード FLIP による矢板式岸壁などの地震応答解析においては、しばしば応答が過大になる。これは、矢板の受働側地盤など常に軸差応力の作用下にあつて繰返しせん断される砂の過剰間隙水圧が他の部分に比べて著しく上昇するためである。このような部分で過剰間隙水圧が大きく上昇するのは、破壊線の近くで繰返しせん断される場合になされる大きな塑性せん断仕事と前述の寄与係数設定法が調和しないためであると考えて、本章では新たな寄与率設定法を検討した。

#### (1) 従来モデル

前節で示した多重せん断機構モデルに基づく矢板式岸壁などの地震応答解析においては、しばしば応答が過大になる傾向が見られる。これは、矢板や控え矢板の受働側地盤など、常に軸差応力の作用下にあつて繰返しせん断される砂の液状化の進行が他の部分に比べて著しく速いためである。

多重せん断機構モデルでは、単位体積の砂に対してなされた塑性せん断仕事  $\Delta W_s$  を、負のダイレイタンスーに対する寄与係数  $R$  を乗じて累積し ((2-3-1)式)、その累積値  $W_s$  により液状化の進行程度を表す液状化フロントパラメータ  $S_0$  を設定する ((2-3-2)式)。

$$W_s = \sum R \Delta W_s \quad (2-3-1)$$

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= 1 - 0.6 (w/w_1)^{p_1} && (\text{if } w < w_1) \\ S_0 &= (0.4 - S_1) (w_1/w)^{p_2} + S_1 && (\text{if } w > w_1) \end{aligned} \right\} \quad (2-3-2)$$

ここに、 $w (=W_s/W_n, W_n = \tau_{m0} \gamma_{m0}/2)$  は、累積塑性せん断仕事  $W_s$  を初期のせん断エネルギー  $W_n$  で正規化したものであり、 $w_1, p_1, p_2, S_1$  は液状化パラメータと呼ばれる液状化の進行を制御するために与えるパラメータである。寄与係数  $R$  は応力空間内の位置によるせん断仕事の負のダイレタンシーへの寄与程度の違いを表すものであり、破壊線に近づくほど小さくなるように便宜的に設定されたものである ((2-3-3)式)。

$$\left. \begin{aligned} &\underline{S \geq S_w \text{ の場合}} \\ &R=1 && (r \leq S m_3 \text{ の場合}) \\ &R=(m_1 - r/S) / (m_1 - m_3) && (r > S m_3 \text{ の場合}) \\ &\underline{S < S_w \text{ の場合}} \\ &R=1 && (r \leq S_w m_3 \text{ の場合}) \\ &R=(m_1 - r/S_w) / (m_1 - m_3) && (r > S_w m_3 \text{ の場合}) \end{aligned} \right\} \quad (2-3-3)$$

ここに、 $r$  は初期平均有効応力  $\sigma_{m0}'$  で正規化した最大せん断応力、 $S$  は状態変数、 $S_w$  は寄与係数の設定法を切り替える境界の  $S$  の値で通常は 0.4 である。また、 $m_1 = \sin \phi_f$  ( $\phi_f$  はせん断抵抗角)、 $m_2 = \sin \phi_p$  ( $\phi_p$  は変相角)、 $m_3 = 0.67 m_2$  である。

図 2-3-1 は、上記寄与係数  $R$  の算定式を応力空間内の領域別に示したものである。既往の多重せん断機構モデル (以下、従来モデル) では、変相線を超えて破壊線に至るまでの応力空間においてなされる塑性せん断仕事の負のダイレタンシーへの寄与係数は、 $S \geq S_w$  の場合、せん断応力の増加に応じて線形に低減させ、破壊線上では 0 としている。この寄与係数設定法によれば、破壊線にいくら近づいても非零の寄与係数が与えられることになる。

矢板の受働側地盤ように軸差応力の作用下にある砂の場合、応力が破壊線に近づいた状態で繰り返しせん断されるため、大きなせん断応力の下で大きな塑性せん断ひずみが生じ、変相線以下とは比較にならないほど大きな塑性せん断仕事になされるが、一方、寄与係数は線形でしか低減されないため、結果的に、破壊線近傍での挙動が負のダイレタンシーの発現に大きく影響する恐れがある。

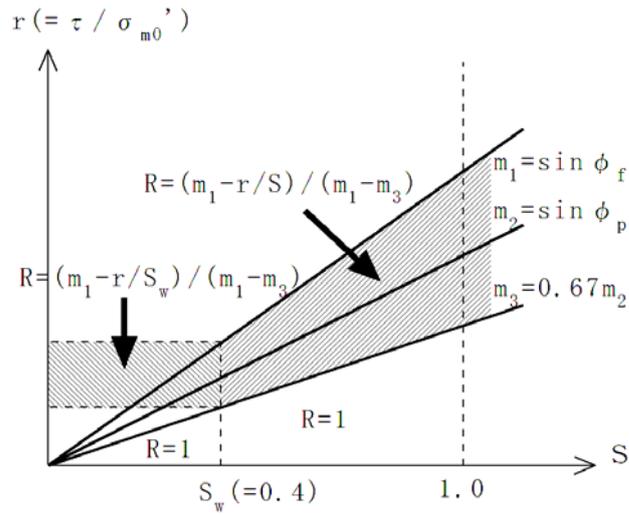


図 2-3-1 従来モデルの寄与係数  $R$  の算定法

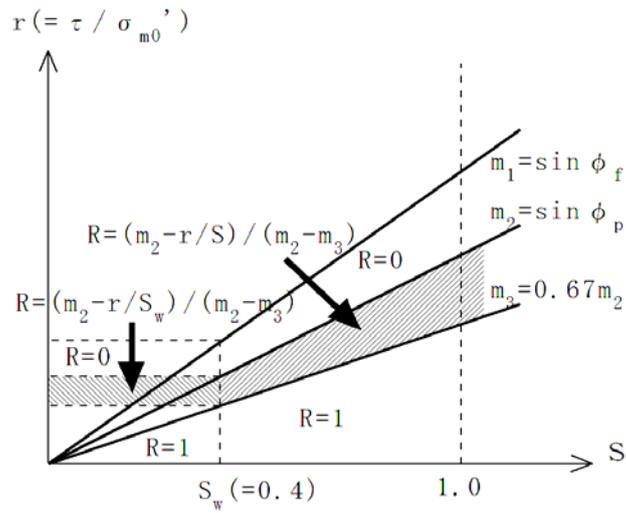


図 2-3-2 修正モデル I の寄与係数  $R$  の算定法

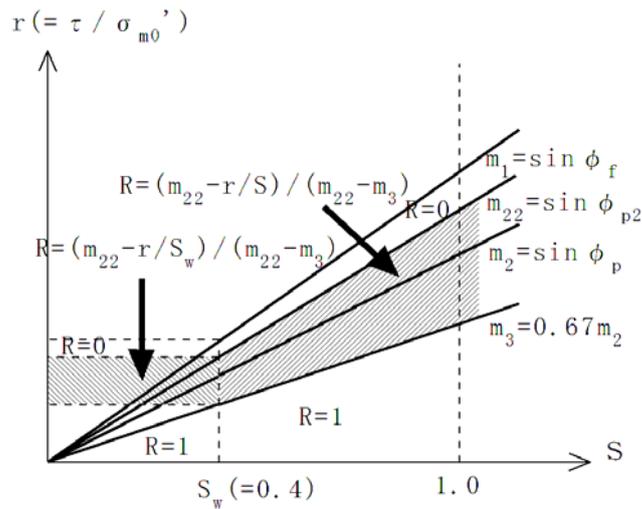


図 2-3-3 修正モデル II の寄与係数  $R$  の算定法

## (2) 軸差応力下での従来モデルの挙動と修正モデル I (tmp3 法)

既往の多重せん断機構モデルの寄与係数設定法が、矢板式岸壁など基礎地盤が軸差応力の作用下で繰り返しせん断を受けるようなタイプの構造物の地震応答を過大なものにして  
いる可能性がある。このため、別に実施された異方圧密後に軸圧一定として軸差応力を作  
用させたまま行われた非排水繰り返しねじりせん断試験<sup>2)</sup> (Matsuo ら, 2000) を対象に従来  
モデルによる解析 (要素シミュレーション解析) を行い、軸差応力下で繰り返しせん断し  
た場合の従来モデルの挙動を確認する。また、比較対照として、従来モデルの寄与係数設  
定法の代わりに、新たに提案する、変相線を超えた応力空間における塑性せん断仕事は、  
負のダイランシーの発現に寄与しないと言う物理機構を想定した修正モデル I (tmp3  
法)<sup>3)</sup>による解析も実施し、寄与係数設定法がモデル挙動に与える影響を調べる (小堤ら、  
2001)。

### (a) 修正モデル I の寄与係数設定法

上述の修正モデル I の寄与係数設定法は以下に示す通りである。また、図 2-3-2は、修  
正モデル I の寄与係数  $R$  の算定式を応力空間内の領域別に示したものである。

<u><math>S \geq S_w</math> の場合</u>		}	(2-3-4)
$R=1$	$(r \leq Sm_3 \text{ の場合})$		
$R=(m_2 - r/S)/(m_2 - m_3)$	$(Sm_3 < r < Sm_2 \text{ の場合})$		
$R=0$	$(Sm_2 \leq r \text{ の場合})$		
<u><math>S &lt; S_w</math> の場合</u>			
$R=1$	$(r \leq S_w m_3 \text{ の場合})$		
$R=(m_2 - r/S_w)/(m_2 - m_3)$	$(S_w m_3 < r < S_w m_2 \text{ の場合})$		
$R=0$	$(S_w m_2 \leq r \text{ の場合})$		

### (b) 非排水繰り返しねじりせん断試験の解析

Matsuo ら (2000) は、相対密度を 60%に調整した豊浦砂 ( $D_{50}=0.16\text{mm}$ ,  $U_c=1.2$ ) の供  
試体を用いて、異方圧密後に軸方向変位を拘束した場合と、拘束せずに軸圧一定とした場  
合の両者について、非排水繰り返しねじりせん断試験を実施した<sup>2)</sup>。

軸方向変位拘束試験では、軸圧 98kPa、側圧 49kPa で異方圧密した後、軸方向変位を拘  
束した状態で非排水繰り返しねじりせん断試験を実施した。試験結果である液状化抵抗曲  
線を図 2-3-4に、また、せん断応力-せん断ひずみ関係と有効応力経路図を図 2-3-5 (a)に  
示す。

これらの試験結果などを参照して、解析地盤定数を表 2-3-1および表 2-3-2に示すように  
設定した。これら定数に基づき、軸方向変位拘束試験に対応する従来モデルおよび修正モ  
デル I によるシミュレーション解析を実施した。解析結果である液状化抵抗曲線を図

2-3-4に、せん断応力-せん断ひずみ関係と有効応力経路図を図 2-3-5の、それぞれ、(b)、(c)に示す。これらの図によれば、従来モデルも修正モデル I も共によく試験結果を再現することが出来た。なお、修正モデル I では、せん断応力比が大きなところで負のダイレタンシーが抑えられるため、図 2-3-4に示した液状化抵抗曲線では、大きなせん断応力比に対しては、繰り返し回数  $N_1$  が若干多くなる傾向にある。

軸圧を一定とする試験では、軸圧 98kPa、側圧 49kPa で異方圧密した後、軸圧を一定として、非排水繰り返しねじりせん断試験を行った。試験結果とこの試験に対応する両モデルによる解析結果の比較を図 2-3-6 (1)と(2)に示す。解析では、軸方向変位拘束試験の要素シミュレーション解析と同一の解析地盤定数を用いた (表 2-3-1および表 2-3-2参照)。これらの図によれば、修正モデル I の結果は概ね試験結果を再現したが、従来モデルの方は、せん断ひずみおよび軸ひずみのレベルが、試験結果および修正モデル I の結果より 2 オーダー程度大きい。

これらの結果などから、以下のことが言える。

- ① 軸差応力が速やかに解消される軸方向変位拘束試験の解析では、従来モデルは試験結果を再現することができた。従って、同じような応力状態にある通常行われる等方圧密後の非排水繰り返しせん断試験の解析や水平成層地盤を対象とする地震応答解析には、従来モデルを適用することができる。
- ② 砂が軸差応力の作用下で繰り返しせん断される軸圧一定試験の解析では、従来モデルを適用すると試験結果の 70~100 倍程度の軸ひずみおよびせん断ひずみが生じた。また、試験では、ひずみの増加率は最終的に頭打ちになるのに対して、解析結果では、増加率は増大傾向にある。一方、修正モデル I では、これらのひずみとその増加傾向は試験結果と概ね一致した。両モデルの違いは変相線を超えた応力空間における寄与係数設定法のみであるので、従来モデルの過大なひずみは寄与係数の設定法に起因するものである。
- ③ 基礎地盤が軸差応力の作用下で繰り返しせん断されるような形式の構造物に対する地震応答解析で見られる過大な応答の一因は寄与係数設定法にある。この点については、本章の最後に両モデルを矢板式岸壁などの例題解析に適用することにより確認する。ただ、事例編第 3 章ほかの事例解析結果で示すように、寄与係数設定法が過大応答の原因のすべてではない。
- ④ 修正モデル I は、従来モデルの代わりに用いることができる可能性があるが、 $K_0=0.5$ とは異なる条件下での検証が必要である。

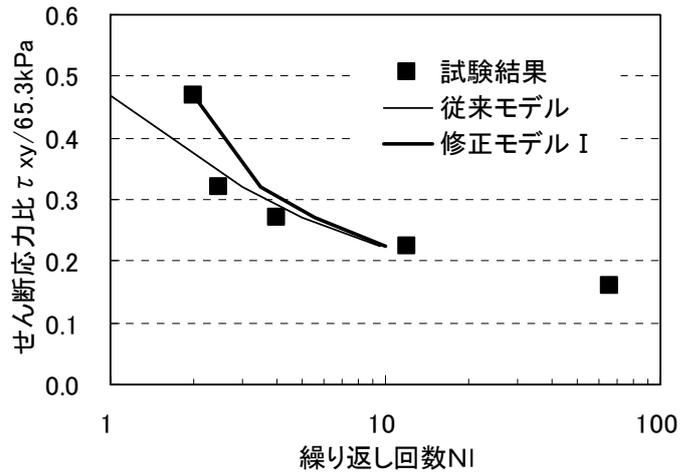


図 2-3-4 軸方向変位拘束試験による液状化抵抗曲線<sup>2)</sup> (Matsuo ら, 2000) と要素シミュレーション結果

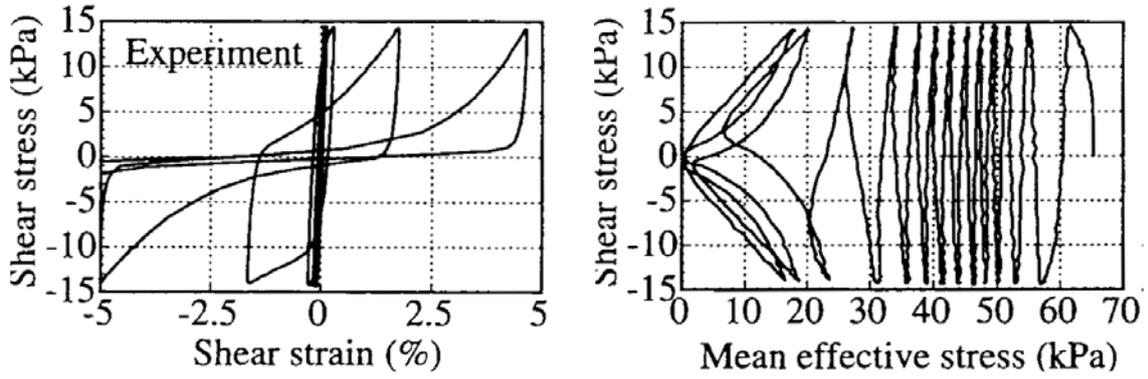
表 2-3-1 豊浦砂 (Dr=60%) : 多重せん断ばねモデルなどのパラメータ

土層名	湿潤密度 $\rho_t$ (t/m <sup>3</sup> )	間隙率 $n$	変形特性							
			初期せん断剛性 $G_{ma}$ (kPa)	体積弾性係数 $K_{ma}$ (kPa)	基準化拘束圧 $\sigma_{ma}'$ (kPa)	ポアソン比 $\nu$	拘束圧依存係数 $m$	内部摩擦角 $\phi_f$ (°)	粘着力 $c$ (kPa)	履歴減衰上限値 $h_{max}$
			$G_{ma}$ (kPa)	$K_{ma}$ (kPa)	$\sigma_{ma}'$ (kPa)	$\nu$	$m$	$\phi_f$ (°)	$c$ (kPa)	$h_{max}$
豊浦砂(Dr=60%)	1.93	0.45	90000	234700	73.5	0.33	0.5	39.5	0	0.24

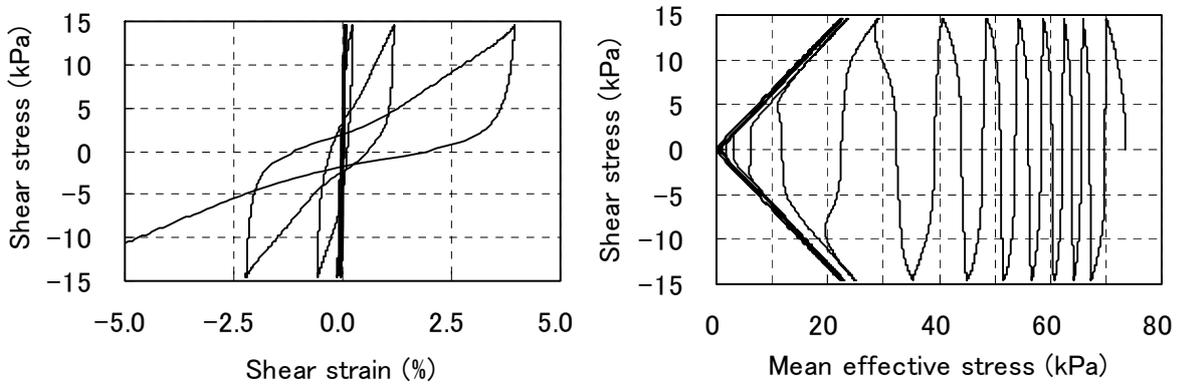
※1  $m_G=m_K=m$  とする。

表 2-3-2 豊浦砂 (Dr=60%) : 過剰間隙水圧モデルのパラメータ

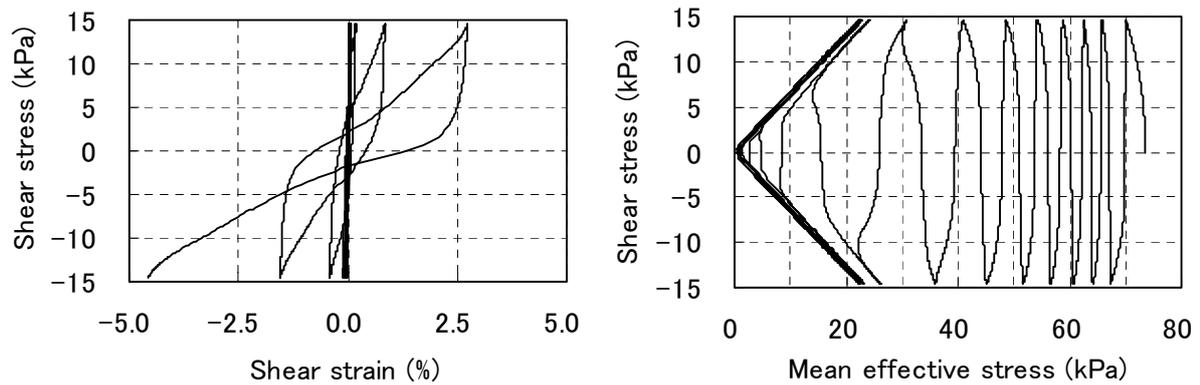
土層名	液状化特性					
	変相角 $\phi_p$ (°)	液状化パラメータ				
		$w_l$	$p_1$	$p_2$	$c_1$	$S_l$
豊浦砂(Dr=60%)	32.0	5.50	0.80	1.20	1.20	0.005



(a) 試験結果であるせん断応力-せん断ひずみ関係（左図）と有効応力経路図（右図）

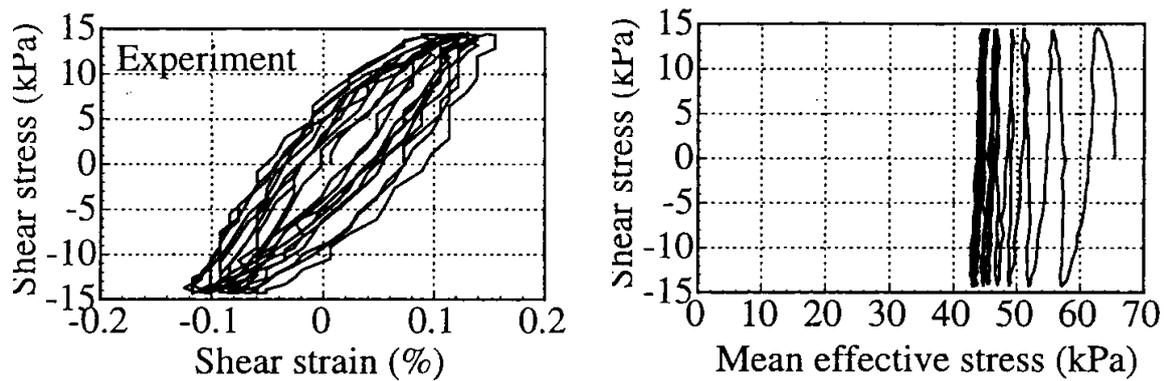


(b) 従来モデルによるせん断応力-せん断ひずみ関係（左図）と有効応力経路図（右図）

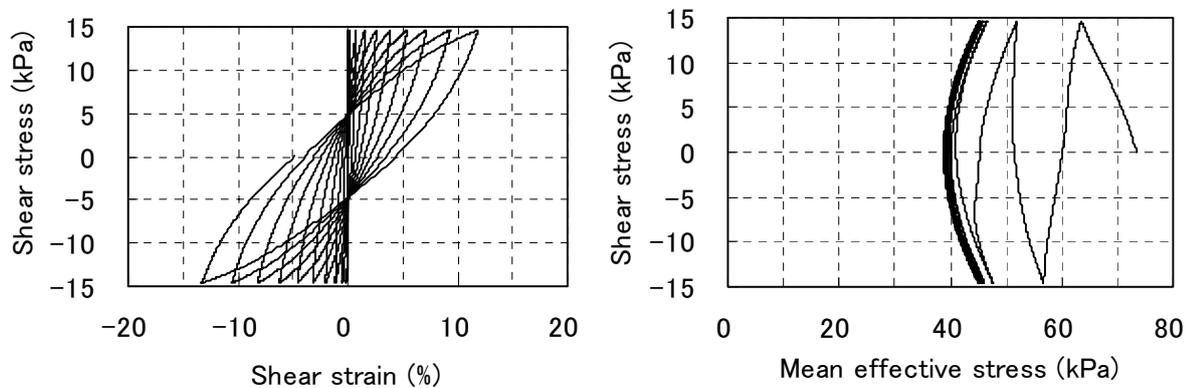


(c) 修正モデル I によるせん断応力-せん断ひずみ関係（左図）と有効応力経路図（右図）

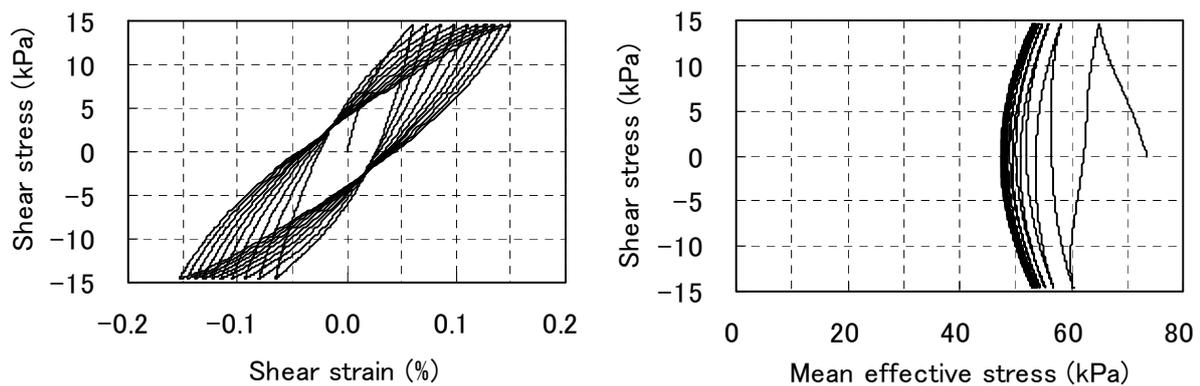
図 2-3-5 軸方向変位拘束試験<sup>2)</sup> (Matsuo ら, 2000) によるせん断応力-せん断ひずみ関係と有効応力経路図（上段）および対応する従来モデル（中段）と修正モデル I（下段）の解析結果



(a) 試験結果であるせん断応力-せん断ひずみ関係 (左図) と有効応力経路図 (右図)

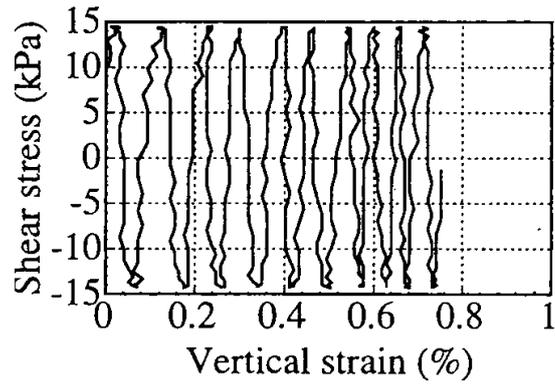


(b) 従来モデルによるせん断応力-せん断ひずみ関係 (左図) と有効応力経路図 (右図)

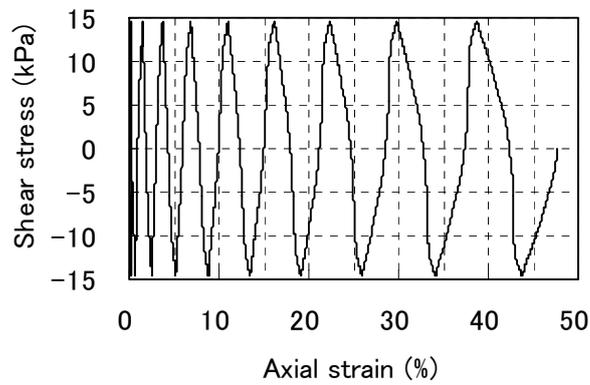


(c) 修正モデル I によるせん断応力-せん断ひずみ関係 (左図) と有効応力経路図 (右図)

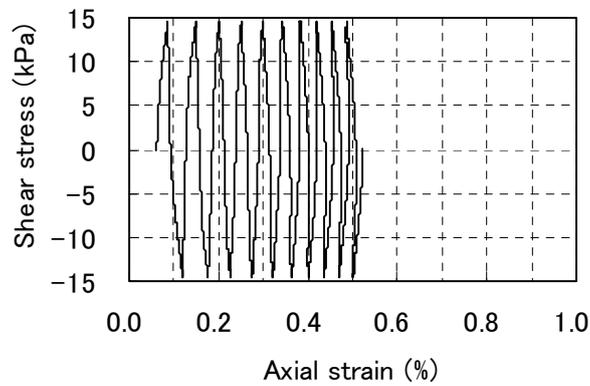
図 2-3-6 (1) 軸圧一定試験<sup>2)</sup> (Matsuo ら, 2000) によるせん断応力-せん断ひずみ関係と有効応力経路図 (上段) および対応する従来モデル (中段) と修正モデル I (下段) の解析結果



(a) 試験結果であるせん断応力-軸ひずみ関係



(b) 従来モデルによるせん断応力-軸ひずみ関係



(c) 修正モデル I によるせん断応力-軸ひずみ関係

図 2-3-6 (2) 軸圧一定試験<sup>1)</sup> (Matsuo ら, 2000) によるせん断応力-軸ひずみ関係  
および対応する従来モデル (中段) と修正モデル I (下段) の解析結果

## 2-3-2 軸差応力下での従来モデルの挙動（続き）と修正モデルⅡ（tmp7法）

前項で示したように、修正モデルⅠを軸圧一定の条件下で行われた非排水繰返しねじりせん断試験<sup>1)</sup>（Matsuoら, 2000）に適用した場合には、試験結果を再現した。ただ、この試験は  $K_0=0.5$  の場合のみを対象としていたので、ここでは別の  $K_0$  値についても従来モデルや修正モデルⅠなどの挙動を確認する。この目的のために、別に実施された非排水繰返しねじりせん断試験結果<sup>4)5)</sup>（建設省土木研究所, 1992: 1995）を参照する。

### （１）参照した試験の概要

様々な条件下で行われた一連の非排水繰返しねじりせん断試験（建設省土木研究所, 1992: 1995）の中から、比較的単純な条件下でなされた複数の試験をモデル挙動確認のために選択した。すなわち、本検討では、表 2-3-3に示す等方圧密後の軸方向変位拘束試験および表 2-3-4に示す軸圧一定試験の各結果を参照した。これらの試験では、いずれも相対密度が 60%に調整された豊浦砂が用いられた。

### （２）解析地盤定数（液状化パラメータを除く）

非排水繰返しねじりせん断試験で使用された相対密度 60%の豊浦砂の解析地盤定数を以下に示す。

#### ① せん断抵抗角と変相角

等方圧密後に非排水繰返しねじりせん断を行う試験のいくつかについて、それらの有効応力経路図（縦軸：ねじりせん断応力，横軸：平均有効応力）から、せん断抵抗角および変相角を読み取り、それらの平均的な値として、せん断抵抗角を44度、変相角を28度と設定した。

#### ② 初期せん断剛性とその平均有効拘束圧依存性

次式<sup>6)</sup>（Iwasakiら, 1977）に、等方圧密後の平均有効応力 98kPa を代入して  $G_0$  を求め（=99800kPa），それを基準初期せん断剛性  $G_{ma}$  とした。基準平均有効拘束圧  $\sigma_{ma}'$  は 98kPa とした。剛性の拘束圧依存性は、同式にならない、平均有効応力の 0.4 乗に比例するものとした。

$$G_0 = 14092 \{ (2.17 - e)^2 / (1 + e) \} \sigma_m'^{0.4} \quad (2-3-5)$$

上式を用いるにあたり、相対密度 ( $Dr=60\%$ ) と最大間隙比 ( $e_{max}=0.983$ ) および最小間隙比 ( $e_{min}=0.609$ ) から求めた間隙率  $e$  (=0.759) を使用した。

異方圧密のケースも含めたすべてのケースの解析には、上述の  $G_{ma}$  と  $\sigma_{ma}'$  を使用した。

### ③ 間隙率

相対密度( $Dr=60\%$ )と最大間隙比( $e_{max}=0.983$ )および最小間隙比( $e_{min}=0.609$ )から、間隙率  $n$  を 0.431 と算定した。

上記のようにして設定した豊浦砂 ( $Dr=60\%$ ) の解析地盤定数 (液状化パラメータを除く) を表 2-3-5に示す。

### (3) 液状化パラメータ

液状化パラメータは、等方圧密後に軸方向変位拘束で繰り返しねじりせん断を行う試験 (表 2-3-3参照) 結果に基づく液状化抵抗曲線を目標に、試行錯誤により、表 2-3-6に示すように定めた。このパラメータによる液状化抵抗曲線と試験結果との比較を図 2-3-7に示す。液状化抵抗曲線のフィッティング作業は、従来モデルを用いて実施した。それにより決定した液状化パラメータを用いて修正モデル I (tmp3 法) で液状化抵抗曲線を計算すると、同図に示すように、大きなせん断応力比では液状化強度が若干大きくなる。このことは、厳密には、最終的な解析で用いるモデルにより液状化パラメータを決定すべきであることを示している。ただ、ここでは、差が小さいのとモデルの挙動の違いを見るのが目的であるので、従来モデルにより定めたパラメータを修正モデル I などによる解析でも用いた。

### (4) 軸圧一定試験のシミュレーション

表 2-3-4に示す軸圧一定の各試験に対するシミュレーション解析を行った。図 2-3-8には、従来モデルによる液状化抵抗曲線の試験結果との比較を、図 2-3-9には、修正モデル I による液状化抵抗曲線の試験結果との比較をそれぞれ示す。従来モデル、修正モデル I とも、 $K_0$  が 1.0 と 0.9 の場合は、解析結果である液状化強度は、試験値を説明している。ただ、 $K_0$  が 0.7 と 0.5 になると状況が一変する。試験結果に対して、従来モデルでは、液状化抵抗が弱すぎ、修正モデル I では液状化抵抗が強すぎる結果となった。従って、従来モデルと修正モデル I の中間的なモデルがちょうど試験結果を再現する可能性がある。ただし、試験では  $K_0$  が 0.7 以下の場合、ねじりせん断ひずみ  $\gamma_{\theta d}$  が液状化判定基準 (5%) に到達せず、これらの図にはその情報が載っていないので、上述の結論は、軸ひずみに関してのみ言える。

表 2-3-3 等方圧密後の軸方向変位拘束試験の一覧と  
液状化抵抗 (建設省土木研究所, 1992)

ケース	$K_0$	$\sigma_a'$	$\sigma_r'$	$\sigma_m'$	$\tau_d/\sigma_m'$	繰返し回数 Nc(回) $\gamma_{\theta d}=5\%$
		kgf/cm <sup>2</sup>	kgf/cm <sup>2</sup>	kgf/cm <sup>2</sup>	(3D)	
K60T01X	1.0	0.994	1.017	1.009	0.136	33.9
K60T02B	1.0	1.024	1.017	1.019	0.179	7.6
K60T03E	1.0	1.005	1.022	1.016	0.264	2.6
K60T05	1.0	1.011	1.017	1.015	0.428	1.3

※  $\sigma_a'$ は軸圧,  $\sigma_r'$ は側圧,  $\sigma_m'$ は初期平均有効応力,  $\tau_d/\sigma_m'$ はせん断応力比,  
 $\gamma_{\theta d}$ はねじりせん断ひずみ.

表 2-3-4 軸圧一定の非排水繰返しねじりせん断試験の一覧と  
液状化抵抗 (建設省土木研究所, 1992: 1995)

ケース	$K_0$	$\sigma_a'$	$\sigma_r'$	$\sigma_m'$	$\tau_d/\sigma_m'$	繰返し回数Nc(回)		
		kgf/cm <sup>2</sup>	kgf/cm <sup>2</sup>	kgf/cm <sup>2</sup>	(3D)	$\gamma_{\theta d}=5\%$	$1.5 \varepsilon_{ad}=5\%$	$1.5 \varepsilon_{ad}=10\%$
J60T02	1.0	1.006	1.006	1.006	0.258	3.2	—	—
J60T03	1.0	1.015	1.016	1.016	0.320	1.1	—	—
J60C02	0.9	1.007	0.902	0.937	0.262	3.1	3.5	5.0
J60C03	0.9	1.008	0.905	0.939	0.328	—	2.5	4.0
J60A02	0.7	1.016	0.716	0.816	0.248	—	7.5	11.5
J60A03A	0.7	1.017	0.717	0.817	0.322	—	4.5	8.0
J60A04	0.7	1.002	0.699	0.800	0.461	—	1.5	3.0
J60B03	0.5	1.015	0.512	0.680	0.328	—	15.5	—
J60B04	0.5	1.007	0.504	0.672	0.463	—	3.0	11.5

※  $\sigma_a'$ は軸圧,  $\sigma_r'$ は側圧,  $\sigma_m'$ は初期平均有効応力,  $\tau_d/\sigma_m'$ はせん断応力比,  
 $\gamma_{\theta d}$ はねじりせん断ひずみ,  $\varepsilon_{ad}$ は軸ひずみ.

表 2-3-5 豊浦砂(Dr=60%) : 多重せん断ばねモデルなどのパラメータ

土層名	湿潤密度	間隙率	変形特性							
			初期せん断剛性	体積弾性係数	基準化拘束圧	ポアソン比	拘束圧依存係数	内部摩擦角	粘着力	履歴減衰上限値
			$G_{ma}$ (kPa)	$K_{ma}$ (kPa)	$\sigma_{ma}'$ (kPa)	$\nu$	$m$	$\phi_f$ ( $^{\circ}$ )	$c$ (kPa)	$h_{max}$
豊浦砂(Dr=60%)	1.93	0.431	99800	260300	98	0.33	0.4	44.0	0	0.24

※1  $m_G=m_K=m$  とする.

表 2-3-6 豊浦砂(Dr=60%) : 過剰間隙水圧モデルのパラメータ

土層名	液状化特性					
	変相角	液状化パラメータ				
		$\phi_p$ ( $^{\circ}$ )	$w_l$	$p_1$	$p_2$	$c_l$
豊浦砂(Dr=60%)	28.0	1.4	0.70	1.00	1.5	0.005

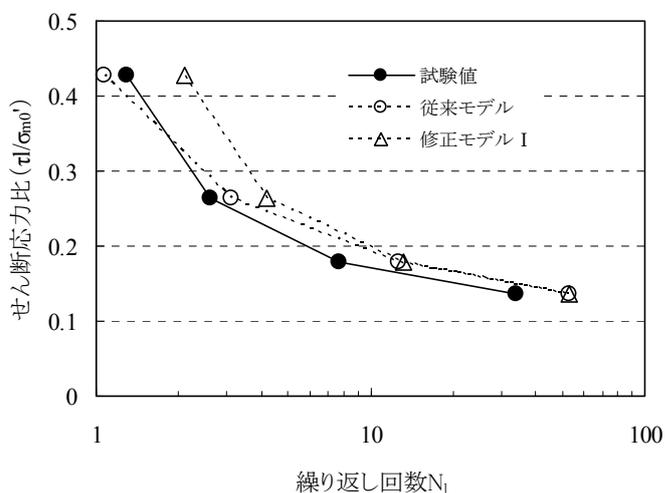
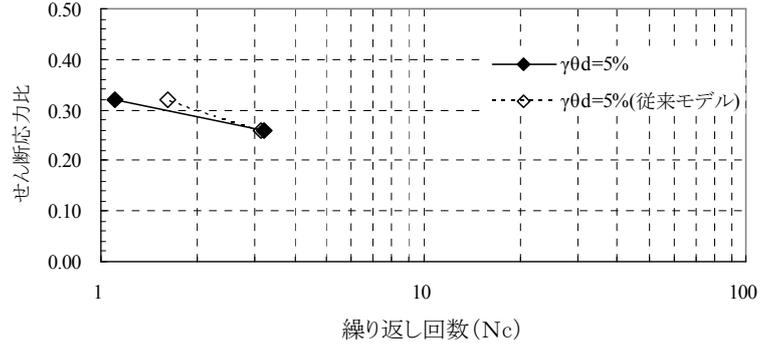


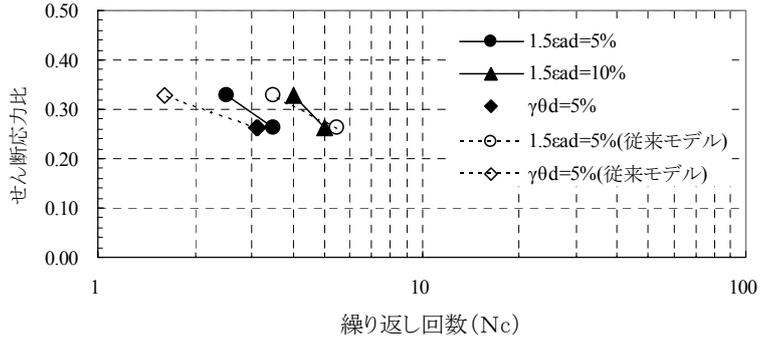
図 2-3-7 軸方向変位拘束試験の液状化抵抗曲線 ( $K_\sigma=1.0$ )

※ 試験値は、建設省土木研究所(1992)による.

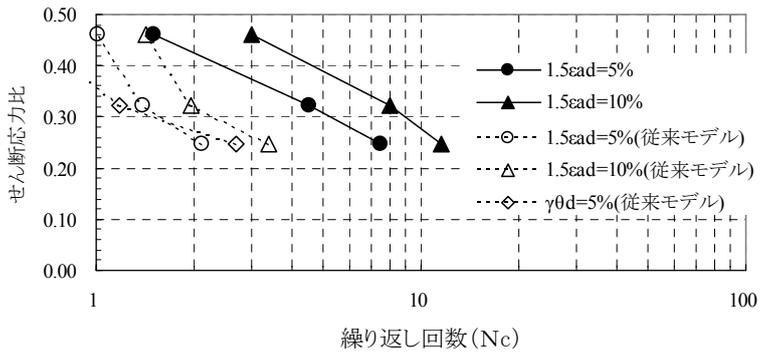
$K_0=1.0$



$K_0=0.9$



$K_0=0.7$



$K_0=0.5$

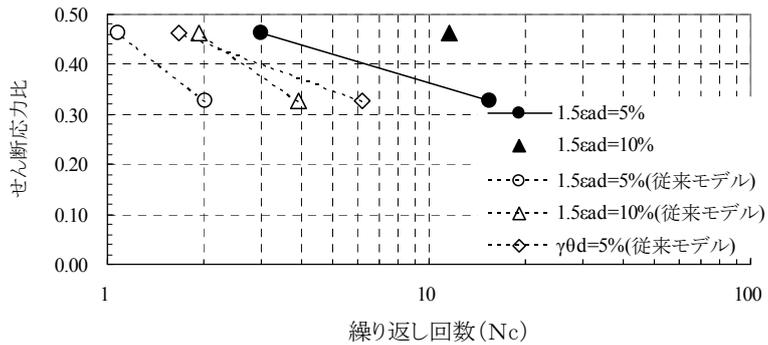
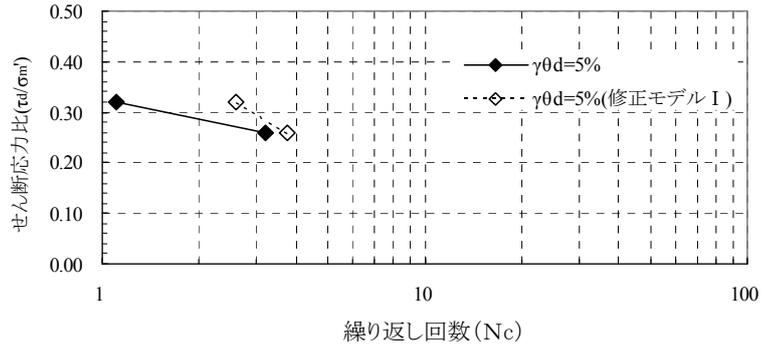


図 2-3-8 非排水繰り返しねじりせん断試験（軸圧一定）に基づく液状化抵抗曲線（塗りつぶしたマーク）と従来モデルによるシミュレーション結果

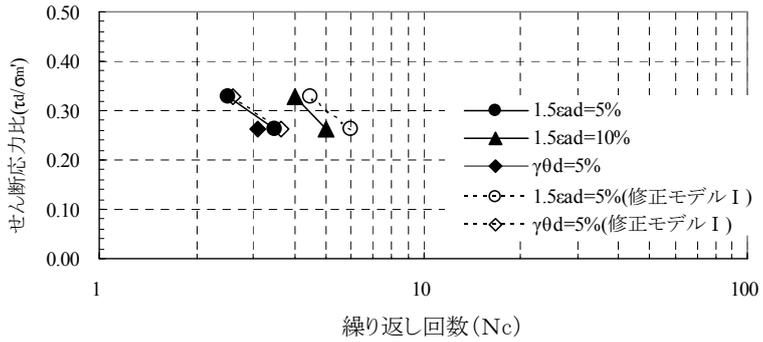
※1 試験値は建設省土木研究所（1992: 1995）による。

※2 図中の  $\epsilon_{ad}$  は軸歪を， $\gamma_{\theta d}$  はねじりせん断ひずみを表す。

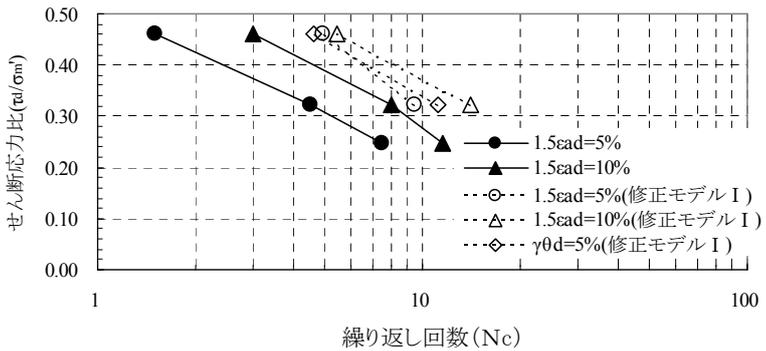
$K_0=1.0$



$K_0=0.9$



$K_0=0.7$



$K_0=0.5$

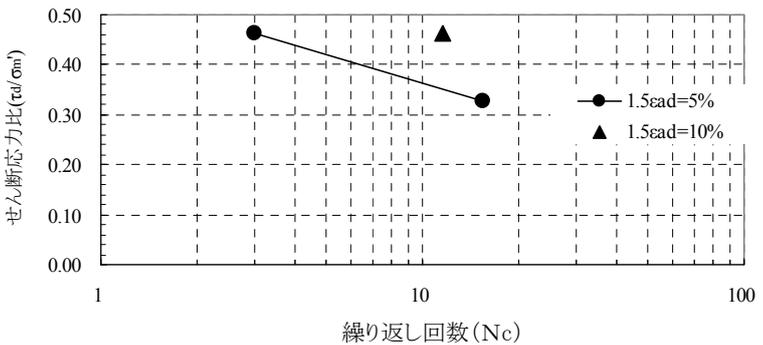


図 2-3-9 非排水繰り返しねじりせん断試験（軸圧一定）に基づく液状化抵抗曲線（塗りつぶしたマーク）と修正モデル I によるシミュレーション結果

※1 図中の  $\varepsilon_{ad}$  は軸歪を， $\gamma\theta d$  はねじりせん断ひずみを表す． ※2 試験値は，建設省土木研究所（1992: 1995）による． ※3 修正モデル I は  $K_0=0.5$  で液状化せず．

(5) 修正モデルⅡ (tmp7 法)

従来モデルと修正モデルⅠの中間的な状態を表現出来るように、塑性せん断仕事の負のダイレタンシーへの寄与係数を表すパラメータ  $R$  の設定法として図 2-3-10の細い実線で示す方法を試した。この設定法では、第2変相角  $\phi_{p2}$  および第2変相線における寄与係数の値が必要である。すなわち、状態変数  $S$  が  $S_w (=0.4)$  以上の領域では、 $R$  を次のように決定する。

- ① せん断応力比  $r$  が変相線高さの  $2/3$  までは、 $R=1.0$ 。
- ② せん断応力比  $r$  が変相線高さの  $2/3$  から第2変相線（第2変相角  $\phi_{p2}$ ）までは、 $R$  は  $1.0$  から RRFP（第2変相線上での  $R$  の値）まで、直線的に変化する。
- ③ せん断応力比  $r$  が第2変相線から破壊線までは、 $R$  は、RRFP から  $0.0$  まで直線的に変化する。

状態変数  $S$  が  $0.4$  以下の領域でも同様であるが、せん断応力比  $r$  は、 $S=0.4$  の時の破壊線などの高さと比較する。

表 2-3-4に示す試験ケースのうち、J60A02, J60A03A（以上、 $K_0=0.7$ ）、J60B03, J60B04（以上、 $K_0=0.5$ ）を対象に、第2変相角  $\phi_{p2}$  と第2変相線上での寄与係数 RRFP の値を種々に変えてシミュレーション解析を行い、試験をよく説明するパラメータセットを探した。この過程で、試験結果に見られるような、軸歪が頭打ちになる傾向（図 2-3-12右列参照）を再現するには、 $R=0$  となる領域が必要であることが分かり、RRFP=0.0 とすることにした（これを修正モデルⅡまたは単に修正モデルと呼ぶ）。

修正モデルⅡの寄与係数設定法は以下に示す通りである。また、図 2-3-3は、修正モデルⅡの寄与係数  $R$  の算定式を応力空間内の領域別に示したものである。

<u><math>S \geq S_w</math> の場合</u>	$R=1$	$(r \leq Sm_3 \text{ の場合})$	}	(2-3-6)
	$R=(m_{22}-r/S)/(m_{22}-m_3)$	$(Sm_3 < r < Sm_2 \text{ の場合})$		
	$R=0$	$(Sm_{22} \leq r \text{ の場合})$		
<u><math>S &lt; S_w</math> の場合</u>	$R=1$	$(r \leq S_w m_3 \text{ の場合})$		
	$R=(m_{22}-r/S_w)/(m_{22}-m_3)$	$(S_w m_3 < r < S_w m_{22} \text{ の場合})$		
	$R=0$	$(S_w m_{22} \leq r \text{ の場合})$		

ここに、 $m_{22}=\sin \phi_{p2}$ である。

この修正モデルⅡで、第2変相角を変相角に一致させると修正モデルⅠに、破壊角に一致させると従来モデルになる。従って、修正モデルⅡは従来モデルと修正モデルⅠを拡張したものになっている。

## (6) 修正モデルⅡの適用結果

修正モデルⅡの第2変相角を変相角 (=28度：修正モデルⅠ) から破壊角 (=44度：従来モデル) の範囲で変動させて軸非拘束の非排水繰返しねじりせん断試験の解析を行った。解析対象ケースは、J60A02, J60A03A (以上,  $K_0=0.7$ ), J60B03, J60B04 (以上,  $K_0=0.5$ ) とした。載荷繰返し回数 25 回目 ( $K_0=0.7$  の場合) または 30 回目 ( $K_0=0.5$  の場合) の軸ひずみおよびねじりせん断ひずみ振幅の試験値との比較を図 2-3-11に示す。この結果などから以下のことが言える。

- ① 第2変相角の大きさによりひずみレベルはかなり変動する。
- ② 従来モデルでは、どのケースでも軸ひずみとねじりせん断ひずみは試験値に比べて非常に大きい。第2変相角を適当に設定することにより、試験結果の大きさに近づけることができる。
- ③ 修正モデルⅡ ( $\phi_{p2}=28$ 度) では、ねじりせん断ひずみは試験結果と整合的であるが、軸ひずみは過小評価する。この傾向は、特に、 $K_0=0.7$  のケースにおいて顕著である。
- ④ 修正モデルⅡ ( $\phi_{p2}=33$ 度) の解析結果は、 $K_0=0.7$  のケースのねじりせん断ひずみを除き、試験結果と整合的である。この場合のひずみ時刻歴の試験結果との比較を図 2-3-12および図 2-3-13に示す。これらの図によれば、やはり、 $K_0=0.7$  のケースのねじりせん断ひずみを除き、解析結果は試験結果と概ね整合する。
- ⑤ 解析結果である軸ひずみとねじりせん断ひずみは、第2変相角が 36 度以下では、 $K_0=0.7$  のケースの方が  $K_0=0.5$  のケースより大きい。試験結果でも軸ひずみに同様の傾向が見られる。解析結果におけるこの違いは、 $K_0=0.7$  のケースの応力経路が塑性せん断仕事の負のダイランシーに対する寄与率設定法が変わる境界 ( $S=S_w (=0.4)$ ) を超えるからである。一方、 $K_0=0.5$  のケースではこの境界を超えないので、ダイランシーに影響する塑性せん断仕事の累積値が抑えられる。この境界を例えば  $S=0.3$  に変更すると、 $K_0=0.7$  のケースのみひずみレベルを抑える効果があるので、試験結果にさらに整合する解析結果が得られる可能性があるが、これについては今後の課題である。

結局、修正モデルⅡで第2変相角を適当に与えると、従来モデルの挙動を大幅に改善し、

概ね試験結果に整合する結果が得られることが分かった。ただ、第2変相角の決定法に関しては、今のところ、本節で参照したような試験結果から評価するか、あるいは被災事例解析を行い、被害程度を説明するように決めるしか方法がない。なお、軸ひずみに着目すれば（図 2-3-11左図）、第2変相角は、概ね、変相角と破壊角の間辺りに取ると具合がよさそうである。

その後、被災事例解析が多数行われ、第2変相角は、変相角と破壊角の間を取る方法が、とりあえずは具合がよさそうであると思われ（例えば、文献7)8)), この方式が、現在では、tmp7法と呼ばれている。

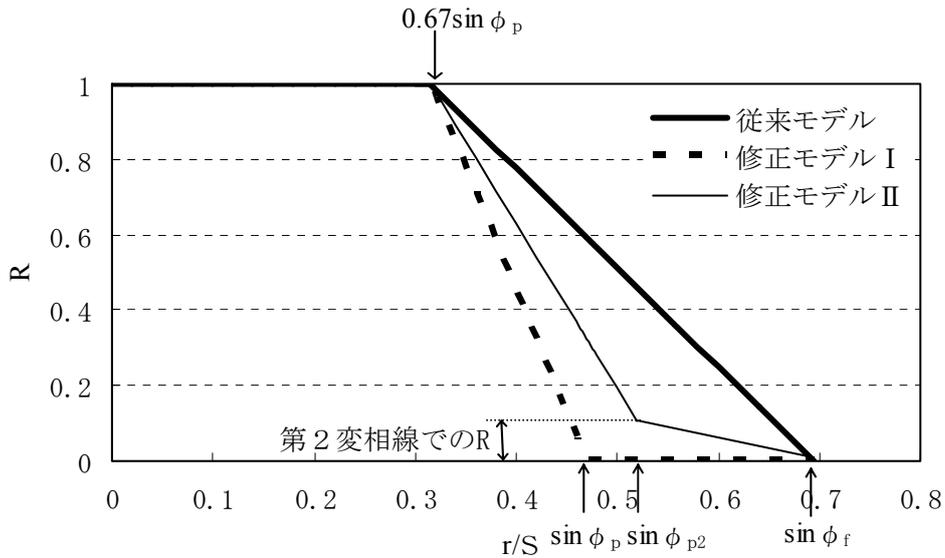


図 2-3-10 寄与係数  $R$  の変化の様子 ( $S > 0.4$  の場合)

横軸は正規化された最大せん断応力  $r$  の  $S$  に対する比,  $\phi_{p2}$  は第 2 変相角を表す。

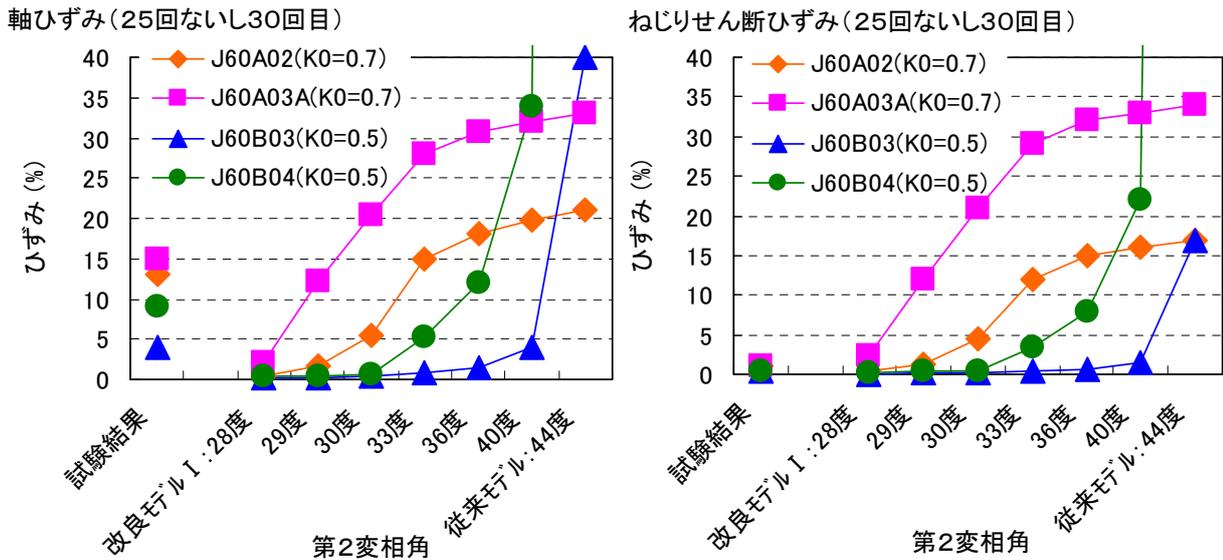


図 2-3-11 軸非拘束ねじりせん断試験の载荷繰返し回数 25 回目 ( $K_0=0.7$ ) または 30 回目 ( $K_0=0.5$ ) の軸ひずみおよびねじりせん断ひずみ振幅の

試験値 (建設省土木研究所, 1995) と解析値の比較

解析値は修正モデル II の第 2 変相角をパラメータとして, その感度を見たもの。

なお, ケース J60B04 の従来モデルの軸ひずみは 744%, ねじりせん断ひずみは 480%。

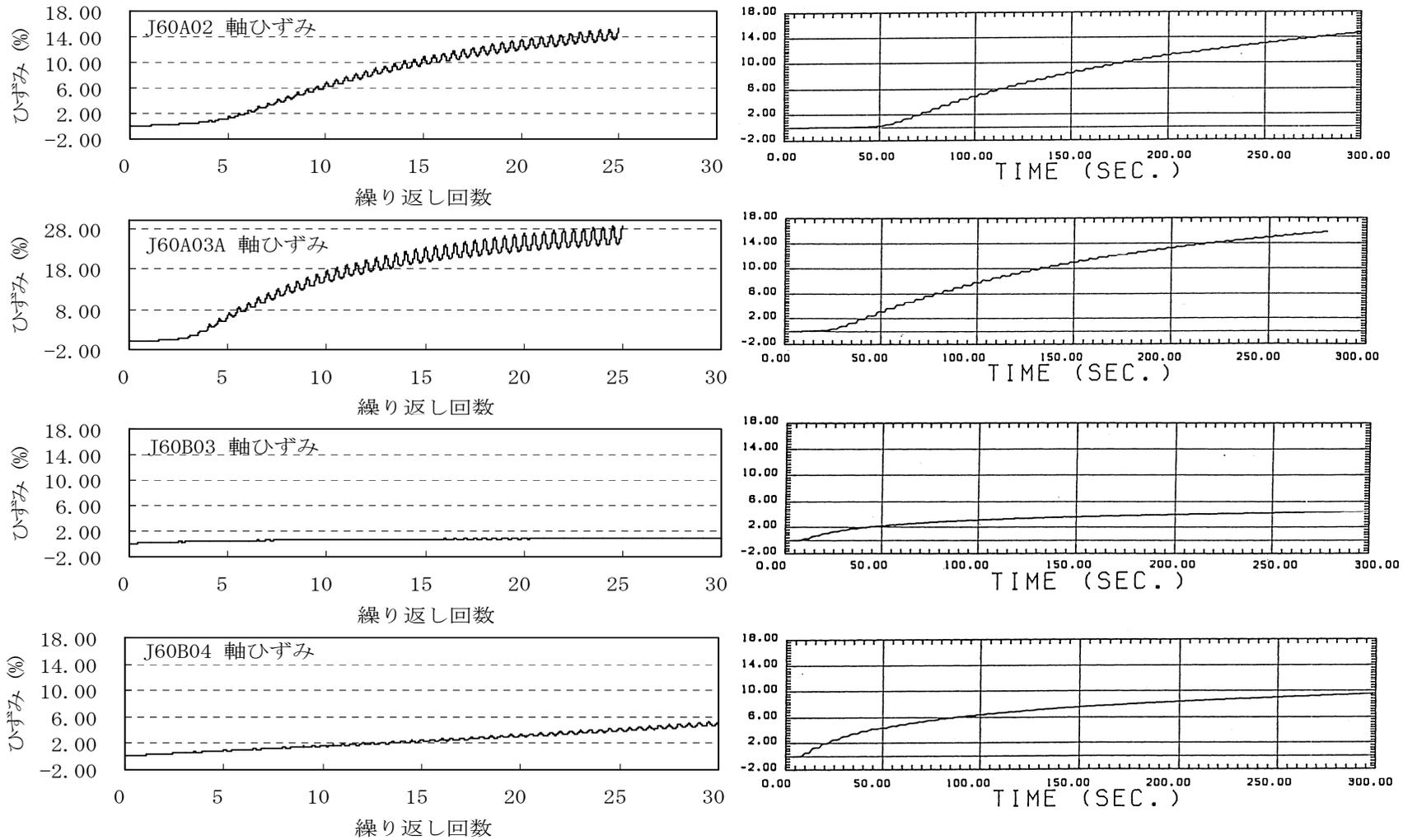


図 2-3-12 軸非拘束ねじりせん断試験の軸ひずみ時刻歴 左列が修正モデル□ ( $\phi_{\rho z}=33$ 度) の計算値, 右列が試験値 (建設省土木研究所, 1992)  
 ケースは上から順に, J60A02, J60A03A ( $K_{\phi}=0.7$ ), J60B03, J60B04 ( $K_{\phi}=0.5$ ) J60A03A のみひずみ軸のスケールが異なる.

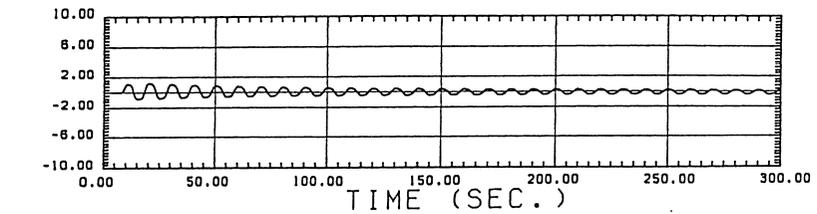
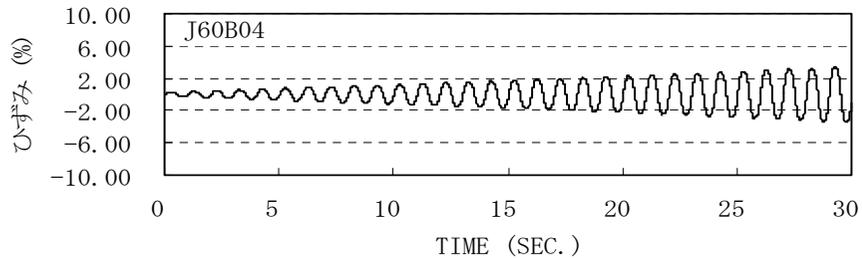
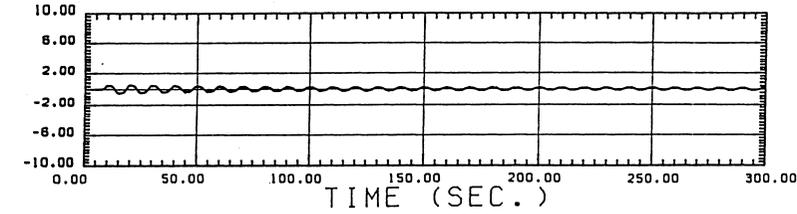
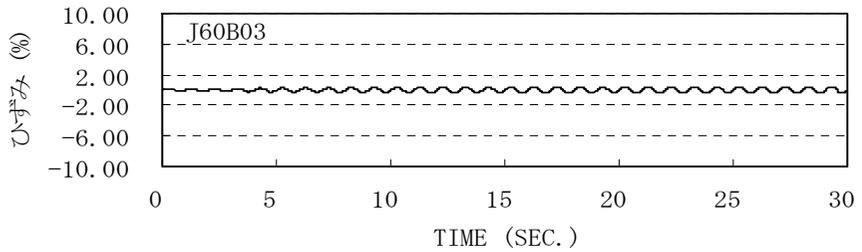
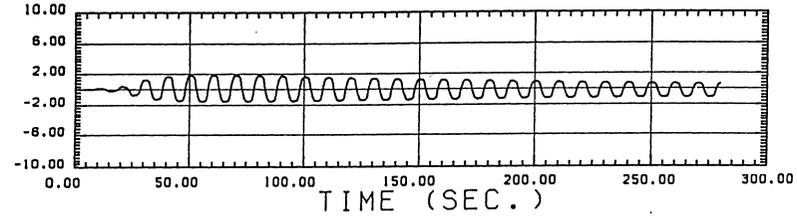
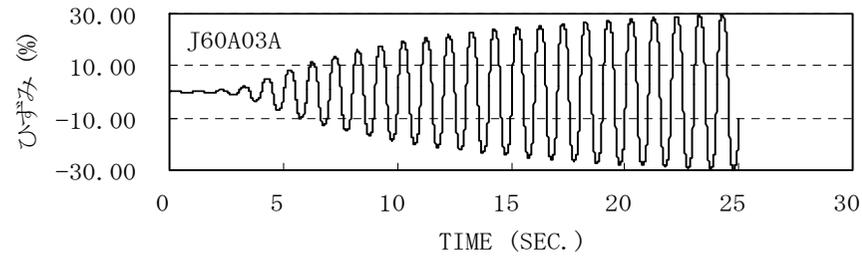
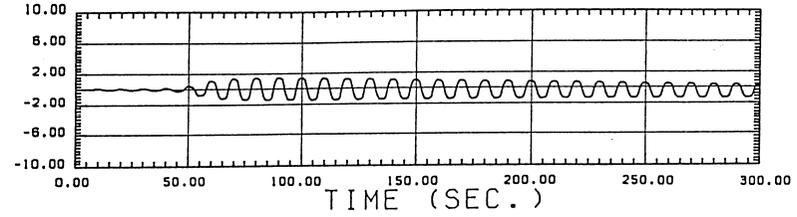
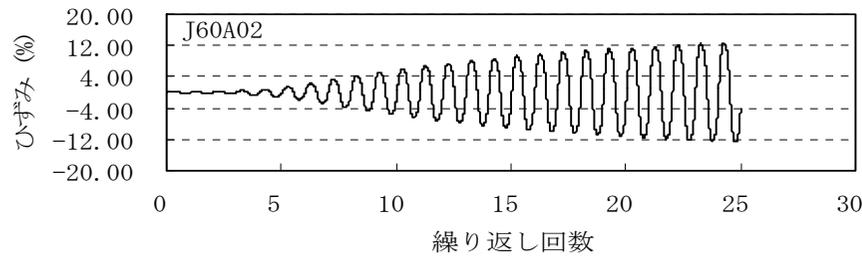


図 2-3-13 軸非拘束ねじりせん断試験のねじりせん断ひずみ時刻歴 左列が修正モデル ( $\phi_{DZ}=33$ 度) の計算値, 右列が試験値 (建設省土木研究所, 1992) 上から順に, J60A02, J60A03A ( $K_D=0.7$ ), J60B03, J60B04 ( $K_D=0.5$ ) 上2ケースのひずみ軸スケールが異なる。

### 2-3-3 過剰間隙水圧モデルにおける応力経路の修正 (Sus 法)

ここでは、細粒分の多い砂に特徴的な定常状態の表現方法について示す。

#### (1) 経緯

平成16年度のFLIP研究会せん断変形ロック問題WGの検討では、定常状態(Steady State)を表現するための過剰間隙水圧モデルの応力経路修正法(Sc法)を示した。平成17年度では、この方法に対して、以下の①②に示す修正を行った。

- ① 従来の $S_c$ 値(定常状態における状態変数 $S^1$ の値)を指定する方式に代わり、定常状態におけるせん断応力 $S_{us}$ (最大せん断応力)を指定するよう改めた。
- ② 破壊線上の①で指定のせん断応力 $S_{us}$ を示す点において応力経路が破壊線と交差するようにして、それ以上のせん断応力を負担しないよう定式化を改めた。なお、平成16年度の定式化では、応力経路を延長して、嵩上げされた破壊線までは迎れるようにしていた。

以下に、上記①②を踏まえた応力経路修正のための定式化<sup>9)</sup>(Sus法)と、これに基づいて修正したプログラム(FLIP 7.1.3版)によるテスト計算の結果を示す。

#### (2) 応力経路変更方法

##### (a) 方針

解析者は定常状態(Steady State)におけるせん断応力 $S_{us}$ (最大せん断応力)を指定するものとする。図2-3-14に示す応力空間( $S$ - $r$ 空間)において、 $S_{us}$ に対応するせん断応力比を $r_{cu}$ 、 $r=r_{cu}$ と破壊線( $r=S\sin\phi_f$ )との交点の $S$ 座標(状態変数 $S^1$ )を $S_{cu}$ とする。

$$r_{cu} = S_{us} / (-\sigma_{m0}') \quad (2-3-7)$$

$$S_{cu} = r_{cu} / \sin\phi_f \quad (2-3-8)$$

ここに、 $\sigma_{m0}'$ は初期平均有効応力、 $\phi_f$ はせん断抵抗角である。

$S_0 \leq S_{cu}$ であれば、応力経路は、図2-3-14に破線で示すように、応力空間の点 $(S, r) = (S_{cu}, r_{cu})$ において破壊線と交わるように定める。この点においてせん断応力 $S_{us}$ を發揮し、また、それ以上のせん断応力は負担しない。なお、 $S_0$ は、液状化フロントパラメータ<sup>1)</sup>である。

さて、 $S_0 > S_{cu}$ の場合も含めて、応力経路を設定するために、まず、液状化フロントパラメータ $S_0$ の値に応じて、 $S_c$ を以下のように定義する。

$$S_c = S_0 \quad \text{if } S_0 > S_{cu} \quad (2-3-9)$$

$$S_c = S_{cu} \quad \text{if } S_0 \leq S_{cu} \quad (2-3-10)$$

応力経路は、応力空間上の点  $(S, r) = (S_c, S_c \sin \phi_f)$  において、破壊線と交差するように定める。特に、 $S_0 > S_{cu}$  である間は、応力経路は、応力空間上で  $(S, r) = (S_0, 0)$  から垂直に立ち上げ、 $(S, r) = (S_0, S_0 \sin \phi_f)$  にて破壊線と交差させる。 $S_0 > S_{cu}$  になると、 $(S, r) = (S_0, 0)$  から図 2-3-14 に示すような経路を辿って、 $(S, r) = (S_{cu}, r_{cu})$  で破壊線と交差するよう定める。また、この応力経路の変化の様子を図 2-3-15 に示す。

### (b) 応力経路の定式化

従来の応力経路を表現するための (2-3-11) ~ (2-3-13) 式は、上述の応力経路を表すよう、(2-3-14) ~ (2-3-16) 式の通りに変更する。

$$S = S_0 \quad (\text{if } r < r_3) \quad (2-3-11)$$

$$S = S_2 + \sqrt{(S_0 - S_2)^2 + [(r - r_3)/m_1]^2} \quad (\text{if } r > r_3) \quad (2-3-12)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ここに、} r_2 = m_2 S_0, \quad r_3 = m_3 S_0, \quad S_2 = S_0 - (r_2 - r_3)/m_1 \\ \text{ただし、} m_1 = \sin \phi_f, \quad m_2 = \sin \phi_p (\phi_p \text{ は変相角}), \quad m_3 = 0.67 m_2 \end{array} \right\} \quad (2-3-13)$$

$$S = S_0 \quad (\text{if } r < r_3) \quad (2-3-14)$$

$$S = S_2' + \sqrt{(S_0 - S_2')^2 + [(r - r_3)/m_1']^2} \quad (\text{if } r > r_3) \quad (2-3-15)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ここに、} r_2 = m_2 S_0, \quad r_3 = m_3 S_0, \quad S_2' = S_0 - (r_2 - r_3)/m_1' \\ \text{ただし、} m_2 = \sin \phi_p (\phi_p \text{ は変相角}), \quad m_3 = 0.67 m_2 \end{array} \right\} \quad (2-3-16)$$

なお、破壊線上の点  $(S_c, r_c (=m_1 S_c))$  を応力経路が通るように  $1/m_1'$  を定める。すなわち、次式により算定する。

$$\frac{1}{m_1'} = \frac{S_c - S_0}{\sqrt{(r_2 - r_3)^2 + (r_c - r_3)^2} - (r_2 - r_3)} \quad (2-3-17)$$

$S_{cu} > 1$  の場合で、初期状態のせん断応力比が  $m_3$  を超過している場合は、(2-3-15) 式が、 $(S_c, r_c (=m_1 S_c))$  および  $(1, r_{st})$  の二点を通るように初期の  $S_0$  を逆算して求める。具体的には、次式を  $S_0$  について解いて求める。

$$\frac{\sqrt{m_{23}^2 + \left(\frac{r_c}{S_0} - m_3\right)^2} - m_{23}}{S_c - S_0} = \frac{\sqrt{m_{23}^2 + \left(\frac{r_{st}}{S_0} - m_3\right)^2} - m_{23}}{1 - S_0} \quad (2-3-18)$$

ここに、 $m_{23} \equiv m_2 - m_3$  である。

さらに、改良型非線形反復計算法<sup>7)</sup>では、 $\partial S/\partial \tau_d$  および  $\partial S/\partial \tau_{xy}$  の値が必要で、従来の(2-3-19)と(2-3-20)式に替えて、(2-3-21)と(2-3-22)式を用いる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tau_d} &= \left\{ (S_0 - S_2)^2 + \left( (r - r_3) / \sin \phi_f \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{(r - r_3)}{|\sigma'_{m0}| \sin^2 \phi_f} \frac{\tau_d}{\tau} \\ &= \frac{1}{S - S_2} \frac{r - r_3}{r} \frac{\tau_d}{\tau_{m0}^2} \end{aligned} \quad (2-3-19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} &= \left\{ (S_0 - S_2)^2 + \left( (r - r_3) / \sin \phi_f \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{(r - r_3)}{|\sigma'_{m0}| \sin^2 \phi_f} \frac{\tau_{xy}}{\tau} \\ &= \frac{1}{S - S_2} \frac{r - r_3}{r} \frac{\tau_{xy}}{\tau_{m0}^2} \end{aligned} \quad (2-3-20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tau_d} &= \left\{ (S_0 - S_2')^2 + \left( \frac{(r - r_3)}{m_1'} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{(r - r_3)}{|\sigma'_{m0}| (m_1')^2} \frac{\tau_d}{\tau} \\ &= \frac{1}{S - S_2'} \frac{r - r_3}{r} \frac{\tau_d}{\tau_{m0}^2} \left( \frac{m_1}{m_1'} \right)^2 \end{aligned} \quad (2-3-21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} &= \left\{ (S_0 - S_2')^2 + \left( \frac{(r - r_3)}{m_1'} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{(r - r_3)}{|\sigma'_{m0}| (m_1')^2} \frac{\tau_{xy}}{\tau} \\ &= \frac{1}{S - S_2'} \frac{r - r_3}{r} \frac{\tau_{xy}}{\tau_{m0}^2} \left( \frac{m_1}{m_1'} \right)^2 \end{aligned} \quad (2-3-22)$$

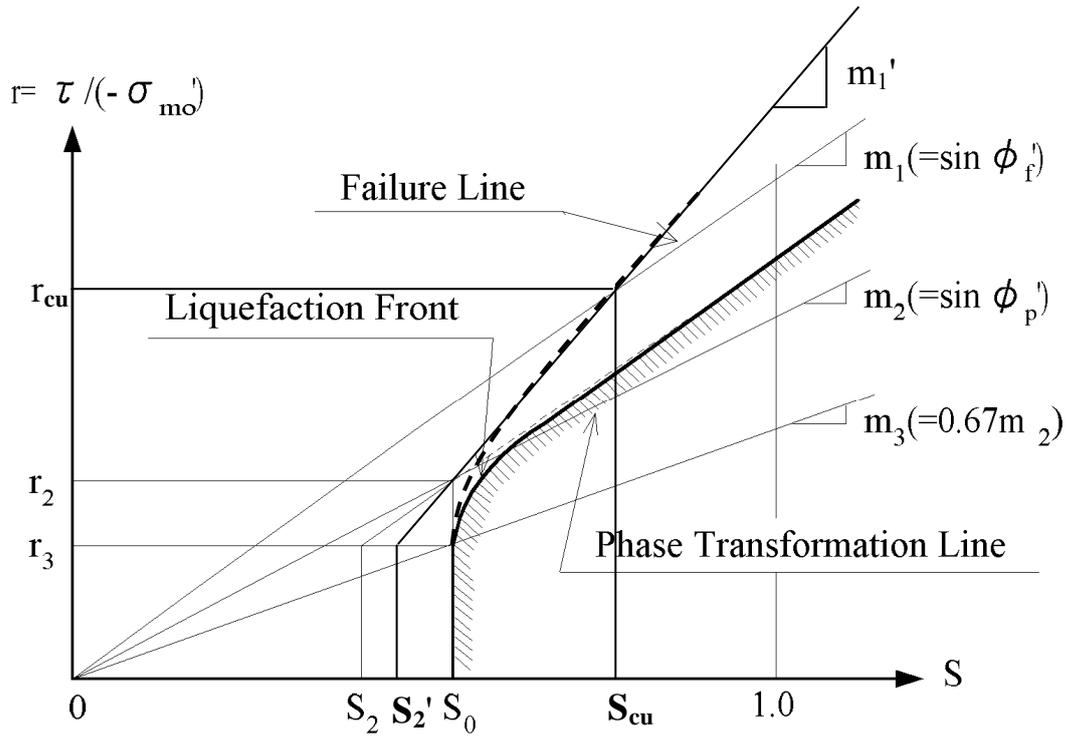


図 2-3-14 過剰間隙水圧モデルの概念図と変更後の応力経路（破線）（文献1）に加筆）

但し、 $S$ は状態変数、 $S_0$ は液状化フロントパラメータ、 $\phi_f$ はせん断抵抗角、 $\phi_p$ は変相角、 $\sigma_{m0}'$ は初期平均有効応力である。

$$\text{また、 } r_{cu} = S_{us} / (-\sigma_{m0}'), \quad S_{cu} = r_{cu} / m_1$$

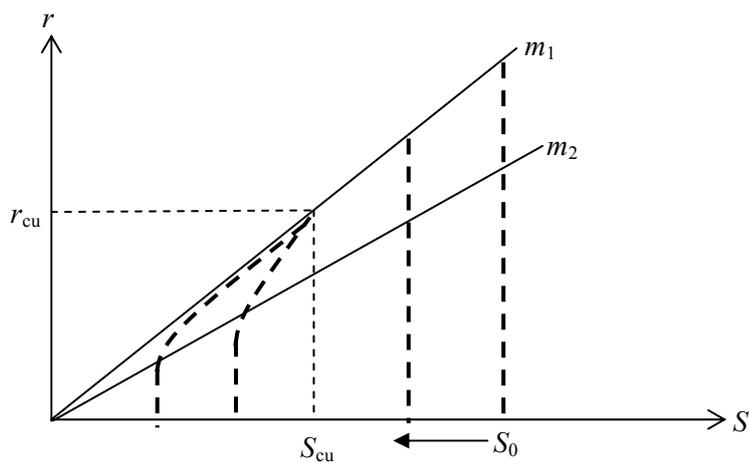


図 2-3-15  $S_0$ の移動に伴う応力経路（太い破線）の変化の概念図

利用者の指定した  $S_{us}$  に応じた  $S_{cu}$  が 1.0 未満の場合

### (3) 要素シミュレーション (その1: 等方圧密)

上述の方法に従って FLIP プログラムを修正し、FLIP713 とした。FLIP713 では、 $S_{us}$  の値を指定することが出来るが、 $S_{us}$  を指定する欄に 0.0 と指定すると、従来の動きになる。すなわち、 $S_{us}$  の値として  $\infty$  を指定したことに相当する。

FLIP605 および FLIP713 で  $S_{us}=\infty, 38.6 \text{ kPa}, 25.7 \text{ kPa}, 16.1 \text{ kPa}, 3.21 \text{ kPa}$  ( $S_{cu}$  値で、 $\infty, 1.2, 0.8, 0.5, 0.1$  相当) として、要素シミュレーションを行った。十勝港浚渫砂 ( $Dr=85\%$ ) の土を  $49\text{kPa}$  で等方に圧密し、その後、非排水で単調せん断するような試験を模擬した。解析地盤定数を表 2-3-7 および表 2-3-8 に示す。

過剰間隙水圧モデルの改良モデルである tmp7 法および改良型非線形反復法を用いた単調載荷のシミュレーション結果を図 2-3-16 に示す。同図によれば、 $S_{us}=3.21\text{kPa}$  とした場合の応力制御による場合を除いて、最終的には、せん断応力は、指定の  $S_{us}$  値に収束した。 $S_{us}$  の値が小さい場合は、 $S_0$  が小さくならないことには、終局のせん断応力は  $S_{us}$  値には収束しない (図 2-3-15 参照)。 $S_{us}=3.21\text{kPa}$  とした場合の応力制御によるケースでは、 $S_0$  が 0.4 以下に低下する前に破壊線に近づきすぎて、tmp7 法の場合の、せん断仕事の負のダイレイタンスへの寄与係数  $R$  が 0 である領域に至ったために、 $S_0$  の低下が抑制され、その結果、最終的なせん断応力は  $S_{us}$  値には収束しなかった。

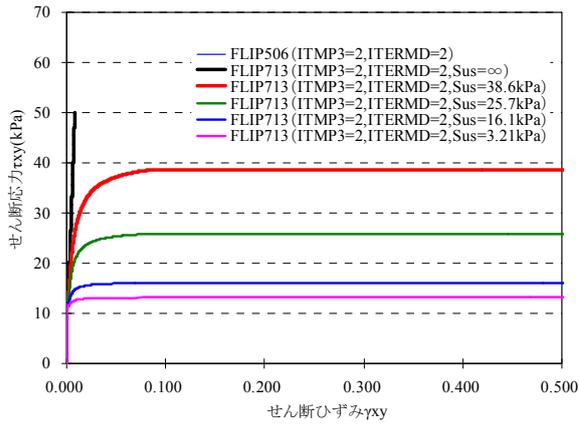
表 2-3-7 要素シミュレーション解析地盤定数：動的変形特性

土層名	湿潤密度	間隙率	動的変形特性							
			初期せん断剛性	体積弾性係数	基準化拘束圧	ポアソン比	拘束圧依存係数	内部摩擦角	粘着力	履歴減衰上限値
			$G_{ma}$ (kPa)	$K_{ma}$ (kPa)	$\sigma_{ma}'$ (kPa)	$\nu$	$m$	$\phi_f$ ( $^\circ$ )	$c$ (kPa)	$h_{max}$
浚渫砂 ( $Dr=85\%$ )	1.898	0.461	$2.34 \times 10^4$	$6.10 \times 10^4$	3.63	0.330	0.50	41.0	0.0	0.25

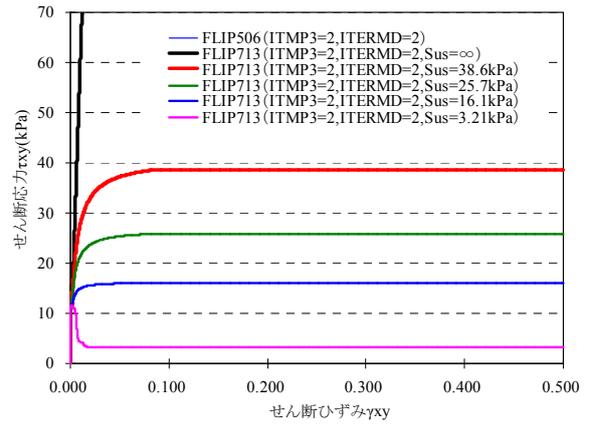
表 2-3-8 要素シミュレーション解析地盤定数：液状化特性

土層名	液状化特性					
	変相角	液状化パラメータ				
		$\phi_b$ ( $^\circ$ )	$w1$	$p1$	$p2$	$c1$
	浚渫砂 ( $Dr=85\%$ )	31.0	1.8	0.35	0.775	1.6

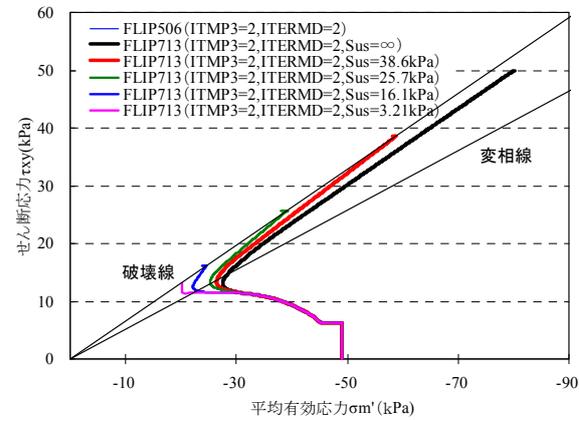
せん断応力-せん断ひずみ関係(応力制御)



せん断応力-せん断ひずみ関係(ひずみ制御:50%まで)



有効応力経路(応力制御)



有効応力経路(ひずみ制御:50%まで)

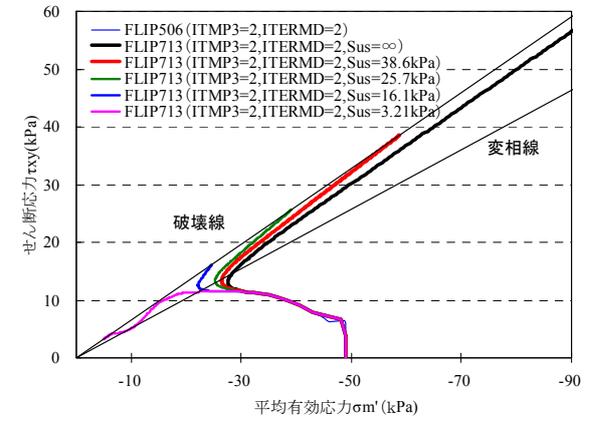


図 2-3-16 FLIP713 による要素シミュレーション結果

ITMP3=2 (tmp7 法) , ITERMD=2 (改良型非線形反復計算法) 等方圧密後単調載荷

FLIP506 の結果と FLIP713 で  $S_{us}=\infty$  とした場合の結果は一致した.

#### (4) 要素シミュレーション (その2: 異方圧密)

後志利別川堤防 No.1 断面の解析モデルにおいて、堤体中央直下の As2 層の 1 要素を取り出し、その位置における初期応力状態になるよう異方圧密を行い ( $\sigma_v' = 133.2 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_h' = 46.95 \text{ kPa}$ )、その後、非排水条件下で単調にせん断する解析を行った。FLIP605 および FLIP713 で  $S_{us} = \infty, 68.0 \text{ kPa}, 45.3 \text{ kPa}, 28.3 \text{ kPa}$  ( $S_c = \infty, 1.2, 0.8, 0.5$  相当) として、要素シミュレーションを行った。As2 層の解析地盤定数を表 2-3-9 および表 2-3-10 に示す。

過剰間隙水圧モデルの改良モデルである tmp7 法および改良型非線形反復法を用いた単調載荷のシミュレーション結果を図 2-3-17 に示す。同図によれば、 $S_{us} = 28.3 \text{ kPa}$  とした場合を除いて、最終的には、せん断応力は、指定の  $S_{us}$  値に収束した。前述の通り、 $S_{us}$  の値が小さい場合は、 $S_0$  が小さくならないことには、終局のせん断応力は  $S_{us}$  値には収束しない (図 2-3-15 参照)。異方圧密の場合は、初期状態において応力は既に破壊線の近くにあり、 $S_{us} = 28.3 \text{ kPa}$  とした場合の応力制御およびひずみ制御のケースでは、 $S_0$  が 0.4 以下に低下する前に破壊線に近づきすぎて、 $S_0$  の低下が抑制され、その結果、最終的なせん断応力は  $S_{us}$  値には収束しなかった。一方、破壊線付近においても、 $S_0$  の低下が抑制されることのない、従来型の過剰間隙水圧モデルを用いた要素シミュレーションも実施した。その結果、 $S_{us} = 28.3 \text{ kPa}$  とした場合も含めて、最終的には、せん断応力は、指定の  $S_{us}$  値に収束した。ただ、この場合、応力制御とひずみ制御では、要素の挙動がかなり異なること、および、ひずみ制御の場合、応力が小さいうちからひずみレベルが極端に大きくなるという結果になった。

表 2-3-9 要素シミュレーション解析地盤定数：動の変形特性

土層名	湿潤密度	間隙率	動の変形特性							
			初期せん断剛性	体積弾性係数	基準化拘束圧	ポアソン比	拘束圧依存係数	内部摩擦角	粘着力	履歴減衰上限値
			$G_{ma}$ (kPa)	$K_{ma}$ (kPa)	$\sigma_{ma}'$ (kPa)	$\nu$	$m$	$\phi_f$ (°)	$c$ (kPa)	$h_{max}$
浚渫砂 (Dr=85%)	1.8	0.45	$3.00 \times 10^4$	$7.98 \times 10^4$	50.5	0.330	0.50	39.0	0.0	0.24

表 2-3-10 要素シミュレーション解析地盤定数：液状化特性

土層名	液状化特性					
	変相角	液状化パラメータ				
	$\phi_b$ (°)	$w1$	$p1$	$p2$	$c1$	$S1$
	浚渫砂 (Dr=85%)	28	1.5	0.9	1.0	1.2

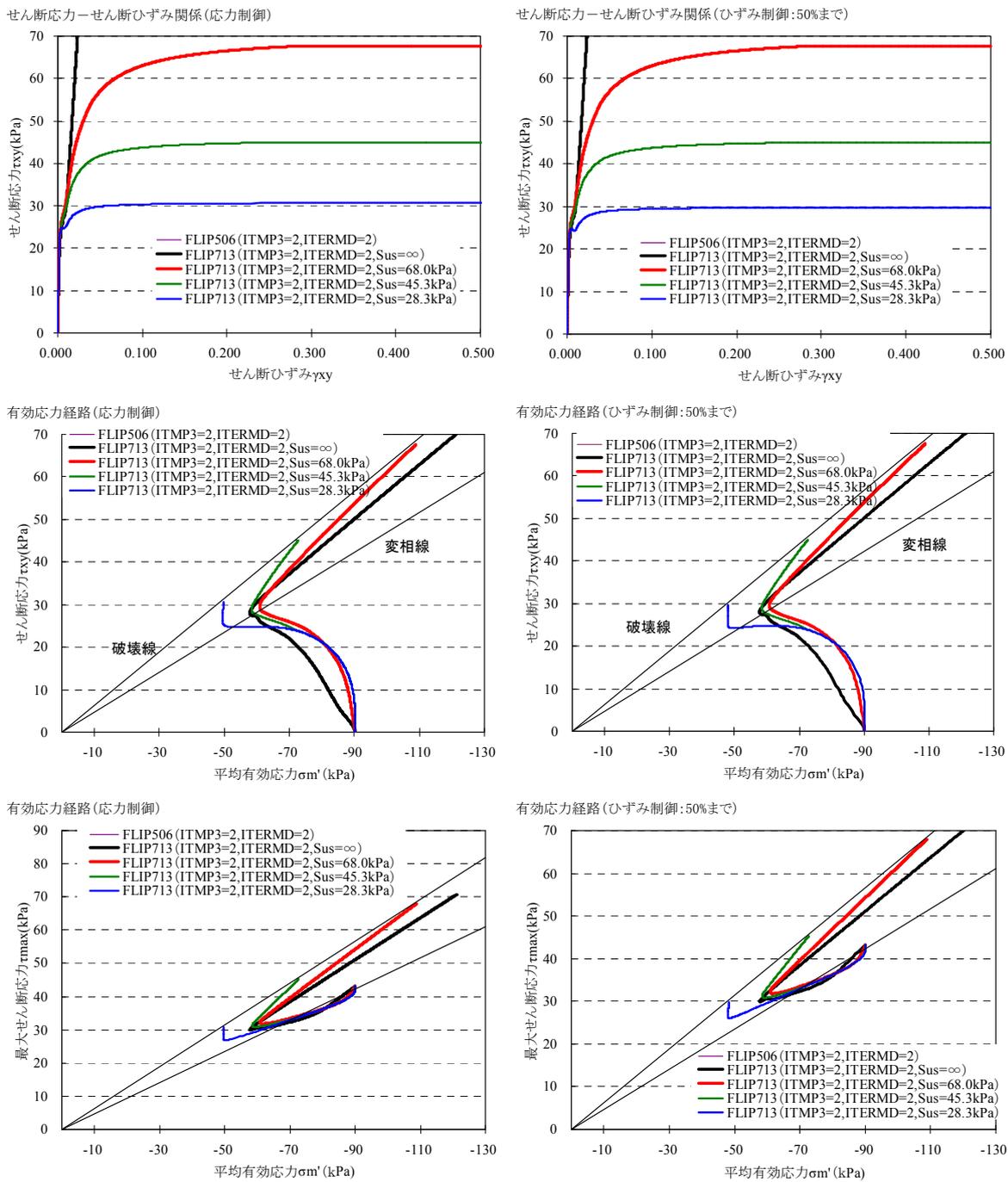


図 2-3-17 FLIP713 による要素シミュレーション結果

ITMP3=2 (tmp7 法) , ITERMD=2 (改良型非線形反復計算法) 異方圧密後単調載荷  
 FLIP506 の結果と FLIP713 で  $S_{us}=\infty$  とした場合の結果は一致した。

## 2-3 節の参考文献

- 1) Iai,S., Matsunaga,Y. and Kameoka,T.: Parameter Identification for a Cyclic Mobility Model, Rep. of the Port and Harbour Res. Inst. Vol.29, No.4, pp.57-83, 1990.
- 2) Matsuo,O, Shimazu,T., Uzuoka,R., Mihara,M., Nishi,K.: Numerical Analysis of Seismic Behavior of Embankments Founded on Liquefiable Soils”, Soils and Foundation, Vol.40-2, 2000.
- 3) 小堤治, 井合進, 島津多賀夫, 三輪滋, 中山裕章, 溜幸生, 沢田俊一, 竹島康人, 森浩章: 変相線を超えた応力空間における塑性せん断仕事の負のダイレタンシーへの寄与について, 第46回地盤工学シンポジウム論文集, 2001.
- 4) 建設省土木研究所: 動土質研究室資料別冊, No.70, 1992.
- 5) 建設省土木研究所: 動土質研究室資料, No.75, 1995.
- 6) Iwasaki,T. and Tatsuoka,F.: Dynamic soil properties with emphasis on comparison of laboratory tests and field measurements, World Conf Earthquake Eng., Vol.6th, No.3 pp.2303-2309, 1977.
- 7) 小堤治: 液状化地盤上の地盤・構造物系の地震被害推定に関する数値解析法の研究, 京都大学学位論文, 2003.
- 8) 小堤治, 塩崎禎郎, 一井康二, 井合進, 森玄: 二次元有効応力解析法の解析精度向上に関する検討, 第29回海洋開発シンポジウム論文集, 2004.7.
- 9) 小堤治, 井合進, 一井康二, 納見昭広: 砂質土の定常状態を考慮するために行った過剰間隙水圧モデルにおける応力経路の修正, 第43回地盤工学研究発表会, 2008.

## 2-4 解析アルゴリズム

### 2-4-1 改良型非線形反復計算法<sup>1)</sup>

砂の繰り返し載荷時の挙動を表現する多重せん断機構モデル<sup>1)</sup> (2-2 節参照 : FLIP のマルチスプリング要素が依拠しているモデル) を適用して地震応答解析を行うと、しばしば応答加速度時刻歴にスパイク状のピークが発生する。スパイク状の加速度は、後述するように1次元地盤モデルを用いた地震応答解析においても発生する。この場合は、過剰間隙水圧上昇時に応答加速度時刻歴にスパイク状のピークが多発し、この傾向は、時間積分間隔  $\Delta t$  を小さくするといっそう激しくなる (図 2-4-7①参照)。また、盛土や矢板式岸壁などの地震応答解析を行う場合にも、特に、液状化する可能性のある基礎地盤が常に軸差応力の作用下にあるような場合に、しばしば応答加速度時刻歴に異常振動が見られる。変相線を超えた領域における塑性せん断仕事の負のダイランシーへの寄与程度を見直した砂の力学モデル (修正モデル : tmp 法) を使用した場合にはこの傾向は著しいものの (図 2-4-14 参照)、従来モデルを使用した場合にも同様の現象が見られる。これらの状況で共通するのは、砂のダイランシーの影響でせん断応力の作用により有効応力が変動し、これによって応力-ひずみ関係が短時間に大きく変動するということである。

従来は各時間ステップ (または荷重ステップ) 内では砂の応力-ひずみ関係は変動しないと言う前提の基に非線形反復計算を行っていた。この方法によれば、静止している応力-ひずみ関係を対象に非線形反復計算を行うので、各時間ステップでの収束性に優れていて、その応力-ひずみ関係を前提とする限りにおいては、当該ステップの非線形反復計算収束時の要素力は、対応する荷重と平衡状態にある。次のステップに進んだ場合、特に、過剰間隙水圧モデルを適用する場合は、前のステップの収束状態に応じて更新された液状化フロント  $S_0$  や状態変数  $S$  により定まる応力-ひずみ関係を前提に収束計算が開始されるが、これだと、たとえ荷重変動が無くても、応力-ひずみ関係の変動による不平衡力が生じることになる (図 2-4-1参照)。Newmark 法などの時間積分法は、不平衡力を解消するために慣性力も動員して釣り合いを保とうとするので、それに対応して不自然な加速度応答が生じることになる。

上述の応答加速度時刻歴にスパイク状のピークが多発する現象は、各時間ステップ内で応力-ひずみ関係を不変と仮定したことに起因して発生するものと考え、本節では、前章で示した多重せん断機構モデルに即して、各時間ステップ内で応力-ひずみ関係の変動を追跡しながら非線形反復計算を行う方法を提案し、その効果を検証する。

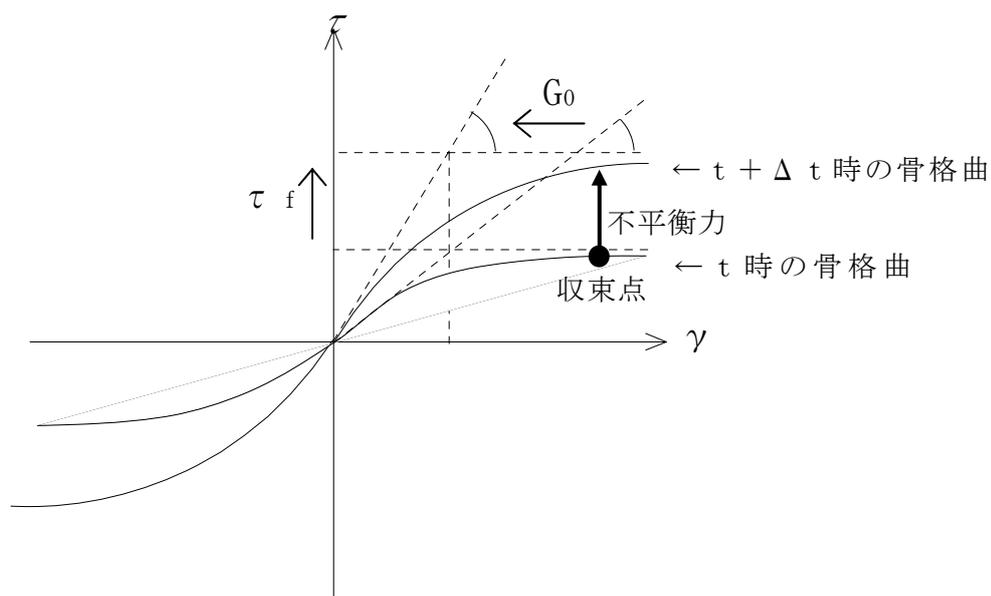


図 2-4-1 不平衡力発生概念図（各時間ステップ内では骨格曲線は不変とした場合）  
骨格曲線の変動は、主に、液状化フロントパラメータ  $S_0$  か状態変数  $S$  の変動による。

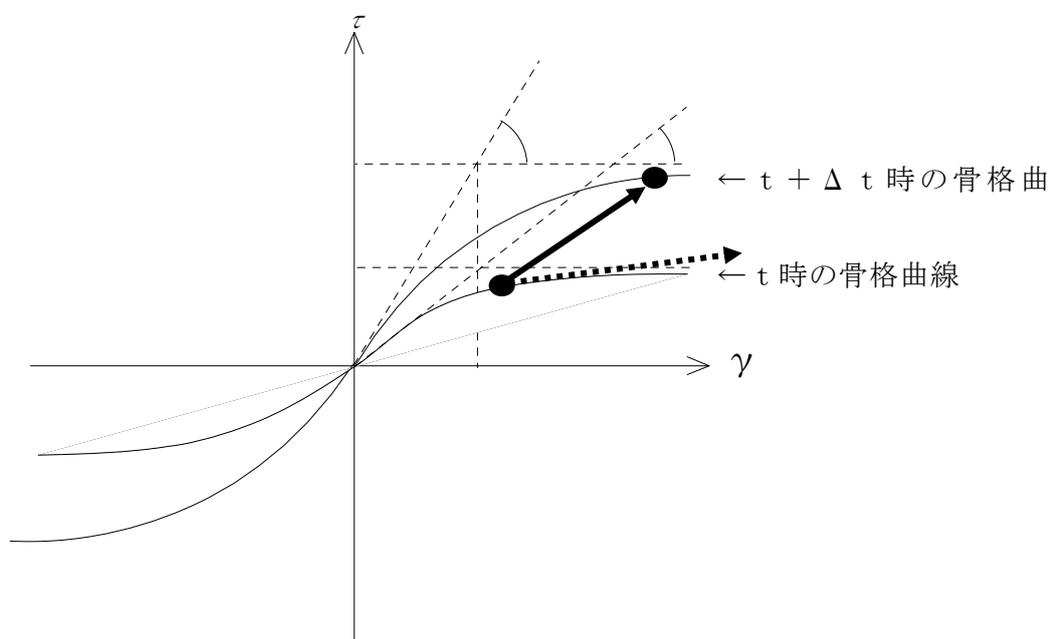


図 2-4-2 各時間ステップ内で状態変数  $S$  の変動による骨格曲線の変動に  
追従する非線形反復計算法の概念図

実線矢印のように、各時間ステップ内で骨格曲線を乗り移って行く。

破線矢印は従来法で、同じ骨格曲線上を移動する。

## (1) 前提条件

2-2 項で述べた砂の力学モデル（多重せん断機構モデル）によると、せん断応力-せん断ひずみ関係の変動は、以下の要因により生じる。

- ①過剰間隙水圧モデル(井合モデル<sup>2)</sup>)を適用しない場合は、平均有効応力  $\sigma_m'$  の変動。
- ②過剰間隙水圧モデル（井合モデル<sup>2)</sup>)を適用する場合は、液状化フロントパラメータ  $S_0$  の更新。
- ③過剰間隙水圧モデル（井合モデル<sup>2)</sup>)を適用する場合は、状態変数  $S$  の変動。

本項では、上記③の要因による各時間ステップ内の骨格曲線の変動に対して、その変動を前提とした非線形反復計算手法を示す。すなわち、収束時には、 $S$  の変動による骨格曲線の変動は折り込み済みで、これによる次ステップへの不平衡力の持ち越しは生じないようなアルゴリズムを示す。図 2-4-2に、この方法の概念図を示す。

土の挙動を表現するのに、過剰間隙水圧モデルを適用せず、多重せん断ばねモデルのみを適用した場合には、応答加速度時刻歴に異常波形は見られないので、①の理由による骨格曲線などの変動への対策は取らない。また、変相線を超えた応力空間における塑性せん断仕事は負のダイレタンシーへ寄与しないという修正モデル（2-3 節参照）を用いた場合で、応力ポイントが破壊線近傍にあり、従って、液状化フロントパラメータ  $S_0$  が変動しないような場合でも（②の要因が考えられない場合でも）、加速度時刻歴には相当な異常波形が見られることがあるので、③の理由による骨格曲線などの変動に対処することは必要と考える。問題は、②の要因による骨格曲線などの変動による不平衡力発生に対して、対策を取らなくてもよいかということになるが、取扱いが困難なので、ここでは、③による変動対策のみを行う。

従って、ここで示す方法では、各時間ステップ内の非線形反復計算においては、液状化フロントパラメータ  $S_0$  は、従来通り固定されている。また、次ステップにおいて、液状化フロントパラメータ  $S_0$  の更新による不平衡力が、従来通り生じることになる。

一方、状態変数  $S$  は、各時間ステップ内の非線形反復計算においては、随時、更新することとし、次ステップにおいては、 $S$  の更新による不平衡力は生じない。

## (2) 骨格曲線の変動を考慮に入れた応力ひずみ関係の接線勾配

### (a) 定式化 I ( $\partial \sigma / \partial \varepsilon$ の導出)

前章で示した多重せん断機構モデルに含まれる過剰間隙水圧モデル (2.2.2 項) を用いる場合の非線形反復計算で必要な  $\partial \{\sigma'\} / \partial \{\varepsilon\}$  の算定式を導く。ここに、 $\{\sigma'\}^T = (\sigma'_x, \sigma'_y, \tau_{xy})$ 、 $\{\varepsilon\}^T = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$  である。また、前述の通り、非線形反復計算の途中で、状態変数  $S$  の値は随時変更するが、液状化フロント  $S_0$  の値は一定として取り扱う。

多重せん断機構モデルでは、偏差応力-偏差ひずみ関係は、以下のように表される。

$$\tau_d \equiv \frac{\sigma'_y - \sigma'_x}{2} = 2 \sum_{i=1}^{2n} F(\gamma_{\theta_i}) \cos \theta_i \Delta \theta \quad (2-4-1)$$

$$\tau_{xy} = 2 \sum_{i=1}^{2n} F(\gamma_{\theta_i}) \sin \theta_i \Delta \theta \quad (2-4-2)$$

但し、 $n$  : 多重せん断ばねモデルの 1/4 円当たりのばねの数

$$\Delta \theta = \pi / 2n \quad (2-4-3)$$

$$\gamma_{\theta_i} = \gamma_d \cos \theta_i + \gamma_{xy} \sin \theta_i \quad (2-4-4)$$

$$\theta_i = (i-1) \Delta \theta \quad (2-4-5)$$

また、

$$\gamma_d \equiv \varepsilon_y - \varepsilon_x \quad (2-4-6)$$

である。また、偏差ひずみ  $\gamma_d, \gamma_{xy}$  には、先行する各解析フェーズにおけるひずみの累積も含まれている。

(2-4-1, 2-4-2)式より、偏差応力  $\tau_d, \tau_{xy}$  は、ともに偏差ひずみ  $\gamma_d, \gamma_{xy}$  の関数であり、また、後で示すように、 $F(\gamma)$  の形は、初期せん断剛性  $G_0$  とせん断強度  $\tau_f$  により決まる。従って、 $\tau_d$  と  $\tau_{xy}$  を以下のように表す。

$$\tau_d = \tau_d(\gamma_d, \gamma_{xy}, G_0, \tau_f) \quad (2-4-7)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(\gamma_d, \gamma_{xy}, G_0, \tau_f) \quad (2-4-8)$$

また、 $\gamma_d$  と  $\gamma_{xy}$  は、B マトリックスを介して、節点変位ベクトル  $U$  と関連付けられる。すなわち、 $\gamma_d$  と  $\gamma_{xy}$  は  $U$  の関数である。

$$\gamma_d = \gamma_d(U) \quad (2-4-9)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(U) \quad (2-4-10)$$

$G_0$  と  $\tau_f$  は、過剰間隙水圧モデルによると、液状化フロント  $S_0$  と状態変数  $S$  の関数であるが、各時間ステップ内では  $S_0$  は一定と見なすので、状態変数  $S$  のみの関数とおく。さらに、 $S$  は、 $S_0$  および  $\tau_d$  と  $\tau_{xy}$  の関数であるが、やはり、各時間ステップ内では  $S_0$  は一定と見なすので、 $\tau_d$  と  $\tau_{xy}$  の関数とする。

$$G_0 = G_0(S) \quad (2-4-11)$$

$$\tau_f = \tau_f(S) \quad (2-4-12)$$

$$S = S(\tau_d, \tau_{xy}) \quad (2-4-13)$$

$\tau_d$  と  $\tau_{xy}$  は、ともに偏差ひずみ  $\gamma_d, \gamma_{xy}$  の関数であり、偏差ひずみは節点変位ベクトル  $U$  の関数である。結局、唯一の独立変数は節点変位ベクトルである。

ここで、 $dU$  に対する  $\tau_d$  と  $\tau_{xy}$  の増分を求める。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d\tau_d \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_d}{\partial \gamma_d} & \frac{\partial \tau_d}{\partial \gamma_{xy}} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_d} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_{xy}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\gamma_d \\ d\gamma_{xy} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_d}{\partial G_0} \frac{dG_0}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_d} & \frac{\partial \tau_d}{\partial G_0} \frac{dG_0}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial G_0} \frac{dG_0}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_d} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial G_0} \frac{dG_0}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\tau_d \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_d}{\partial \tau_f} \frac{d\tau_f}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_d} & \frac{\partial \tau_d}{\partial \tau_f} \frac{d\tau_f}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \tau_f} \frac{d\tau_f}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_d} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \tau_f} \frac{d\tau_f}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\tau_d \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-4-14)$$

上式右辺の係数行列を、第一項から順に、 $K_1, K_2, K_3$  と書くと、上式は、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} d\tau_d \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} d\gamma_d \\ d\gamma_{xy} \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} d\tau_d \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} + K_3 \begin{pmatrix} d\tau_d \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (2-4-15)$$

これより、次式を得る。

$$\begin{pmatrix} d\tau_d \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} = (I - K_2 - K_3)^{-1} K_1 \begin{pmatrix} d\gamma_d \\ d\gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2-4-16)$$

あるいは、

$$\begin{pmatrix} d\tau_d \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} d\gamma_d \\ d\gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2-4-17)$$

ここに、

$$K = (I - K_2 - K_3)^{-1} K_1 \quad (2-4-18)$$

なお、(2-4-14)式の各係数行列の成分の算定法については後で示す。特に、各時間ステップ内で、状態変数  $S$  も一定とした従来の定式化では、 $K_2=K_3=0$  であり、従って、 $K=K_1$  となる。

一方、過剰間隙水圧モデルを適用した場合の、平均有効応力-平均ひずみ関係は、次式で与えられる。

$$\sigma'_m \equiv \frac{\sigma'_x + \sigma'_y}{2} = -B(-\varepsilon_v + \varepsilon_{vp})^{\frac{1}{1-m_K}} \quad (2-4-19)$$

ここに、

$$B = \left( (1 - m_K) \frac{K_{ma}}{|\sigma'_{ma}|^{m_K}} \right)^{\frac{1}{1-m_K}} \quad (2-4-20)$$

また、 $\varepsilon_v$  は、全体積ひずみ（弾性体積ひずみ+塑性体積ひずみ）であり、これには、先行する各解析フェーズにおける体積ひずみ（但し弾性体積ひずみ）の累積も含み、次式で表される。

$$\varepsilon_v \equiv \varepsilon_y + \varepsilon_x \quad (2-4-21)$$

$\varepsilon_{vp}$  は、現解析フェーズで生じた塑性体積ひずみで、状態変数  $S$  の関数である。

$$\varepsilon_{vp} = \varepsilon_{vp}(S) \quad (2-4-22)$$

なお、最終解析フェーズでのみ液状化を考慮することが出来るものとし、先行する各解析フェーズにおける塑性体積ひずみの発生は考えていない。

ここで、偏差応力と同様、 $\sigma_m'$  の増分を求める。

$$\begin{aligned} d\sigma_m' &= B \left( \frac{1}{1-m_K} \right) (-\varepsilon_v + \varepsilon_{vp})^{\frac{m_K}{1-m_K}} (d\varepsilon_v - d\varepsilon_{vp}) \\ &= K_{ma} \left| \frac{\sigma_m'}{\sigma_{ma}'} \right|^{m_K} (d\varepsilon_v - d\varepsilon_{vp}) \end{aligned} \quad (2-4-23)$$

特に、(2-4-17)式を利用して、 $d\varepsilon_{vp}$  は、次のように変形出来る。

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{vp} &= \frac{d\varepsilon_{vp}}{dS} \left[ \frac{\partial S}{\partial \tau_d} \quad \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} \right] \begin{pmatrix} d\tau_d \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} \\ &= \frac{d\varepsilon_{vp}}{dS} \left[ \frac{\partial S}{\partial \tau_d} \quad \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} \right] K \begin{pmatrix} d\gamma_d \\ d\gamma_{xy} \end{pmatrix} \\ &= K_4 \begin{pmatrix} d\gamma_d \\ d\gamma_{xy} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-4-24)$$

なお、

$$K_4 = \frac{d\varepsilon_{vp}}{dS} \left[ \frac{\partial S}{\partial \tau_d} \quad \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} \right] K \quad (2-4-25)$$

従って、(2-4-23)式は、次のように書ける。

$$d\sigma_m' = a (d\varepsilon_v - K_4 \begin{pmatrix} d\gamma_d \\ d\gamma_{xy} \end{pmatrix}) \quad (2-4-26)$$

但し、

$$a = K_{ma} \left| \frac{\sigma_m'}{\sigma_{ma}'} \right|^{m_K} \quad (2-4-27)$$

従来の定式化では、 $K_4 = 0$  であったので、(2-4-26)式は、 $d\sigma_m' = a d\varepsilon_v$  となる。ここで、(2-4-26)式を変形すると次式を得る。

$$d\sigma_m' = \frac{d\sigma_x' + d\sigma_y'}{2} = a d\varepsilon_x + a d\varepsilon_y - ak_{41} (d\varepsilon_y - d\varepsilon_x) - ak_{42} d\gamma_{xy} \quad (2-4-28)$$

ここに、 $k_{41}$  と  $k_{42}$  は、(2-4-25)式の  $K_4$  行列の第1成分と第2成分を表す。同様に、(2-4-17)式から次の二つの式を得る。

$$d\tau_d = \frac{d\sigma_y' - d\sigma_x'}{2} = k_{11} (d\varepsilon_y - d\varepsilon_x) + k_{12} d\gamma_{xy} \quad (2-4-29)$$

$$d\tau_{xy} = k_{21}(d\varepsilon_y - d\varepsilon_x) + k_{22}d\gamma_{xy} \quad (2-4-30)$$

ただし、 $k_{ij}$ は、(2-4-18)式で定義される  $K$  行列の  $(i,j)$ 成分を表す。

(2-4-28)式と(2-4-29)式からは、次の二つの式を得る。

$$\begin{aligned} d\sigma'_x &= a d\varepsilon_x + a d\varepsilon_y - ak_{41}(d\varepsilon_y - d\varepsilon_x) - ak_{42}d\gamma_{xy} - k_{11}(d\varepsilon_y - d\varepsilon_x) - k_{12}d\gamma_{xy} \\ &= (a + ak_{41} + k_{11})d\varepsilon_x + (a - ak_{41} - k_{11})d\varepsilon_y + (-ak_{42} - k_{12})d\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2-4-31)$$

$$\begin{aligned} d\sigma'_y &= a d\varepsilon_x + a d\varepsilon_y - ak_{41}(d\varepsilon_y - d\varepsilon_x) - ak_{42}d\gamma_{xy} + k_{11}(d\varepsilon_y - d\varepsilon_x) + k_{12}d\gamma_{xy} \\ &= (a + ak_{41} - k_{11})d\varepsilon_x + (a - ak_{41} + k_{11})d\varepsilon_y + (-ak_{42} + k_{12})d\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2-4-32)$$

(2-4-30)、(2-4-31)、(2-4-32)の各式より、次の行列表示を得る。

$$\begin{Bmatrix} d\sigma'_x \\ d\sigma'_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a + ak_{41} + k_{11} & a - ak_{41} - k_{11} & -ak_{42} - k_{12} \\ a + ak_{41} - k_{11} & a - ak_{41} + k_{11} & -ak_{42} + k_{12} \\ -k_{21} & k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-4-33)$$

上式右辺の係数行列は、 $d\varepsilon_{vp}$ に関する項 ( $k_{41}$  と  $k_{42}$  を含む項)が入ると対称性を失う。従って、ここでは、簡単のために、この項を無視することも考えられる。

$$\begin{Bmatrix} d\sigma'_x \\ d\sigma'_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a + k_{11} & a - k_{11} & -k_{12} \\ a - k_{11} & a + k_{11} & k_{12} \\ -k_{21} & k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-4-34)$$

なお、(2-4-34)式の右辺係数行列も、従来の定式化では対称行列であるが、一般には対称行列とは限らない。(2-4-34)式が対称行列にならない場合は、(2-4-33)式の係数行列式を対称化する方法も考えられる。すなわち、

$$\begin{Bmatrix} d\sigma'_x \\ d\sigma'_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a + ak_{41} + k_{11} & a - k_{11} & -\frac{ak_{42}}{2} - \frac{k_{12} + k_{21}}{2} \\ a - k_{11} & a - ak_{41} + k_{11} & -\frac{ak_{42}}{2} + \frac{k_{12} + k_{21}}{2} \\ -\frac{ak_{42}}{2} - \frac{k_{12} + k_{21}}{2} & -\frac{ak_{42}}{2} + \frac{k_{12} + k_{21}}{2} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-4-35)$$

#### (b) 定式化 II (各係数行列成分算定法)

以下の  $K_1 \sim K_3$  の各係数行列の成分の算定法を示す。

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_d}{\partial \gamma_d} & \frac{\partial \tau_d}{\partial \gamma_{xy}} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_d} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_{xy}} \end{bmatrix} \quad (2-4-36)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_d}{\partial G_0} \frac{dG_0}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_d} & \frac{\partial \tau_d}{\partial G_0} \frac{dG_0}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial G_0} \frac{dG_0}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_d} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial G_0} \frac{dG_0}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} \end{bmatrix} \quad (2-4-37)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_d}{\partial \tau_f} \frac{d\tau_f}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_d} & \frac{\partial \tau_d}{\partial \tau_f} \frac{d\tau_f}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} \\ \frac{\partial \tau_f}{\partial \tau_{xy}} \frac{d\tau_f}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_d} & \frac{\partial \tau_f}{\partial \tau_{xy}} \frac{d\tau_f}{dS} \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} \end{bmatrix} \quad (2-4-38)$$

前述のように、 $\tau_d$ と $\tau_{xy}$ の算定式は、次式で表される。

$$\tau_d \equiv \frac{\sigma'_y - \sigma'_x}{2} = 2 \sum_{i=1}^{2n} F(\gamma_{\theta_i}) \cos \theta_i \Delta \theta \quad (2-4-39)$$

$$\tau_{xy} = 2 \sum_{i=1}^{2n} F(\gamma_{\theta_i}) \sin \theta_i \Delta \theta \quad (2-4-40)$$

ここに、関数 $F(\gamma)$ は、各スプリングのばね変位 $\gamma$ からばね力 $F$ を算定する関数であり、 $\gamma \sim F$ 関係には双曲線モデルが採用されている。双曲線の骨格曲線などは、 $G_0$ と $\tau_f$ の関数でもある。また、ばね変位 $\gamma$ は偏差ひずみ $\gamma_d, \gamma_{xy}$ の関数である。すなわち、

$$F = F(\gamma, G_0, \tau_f) \quad (2-4-41)$$

$$\gamma = \gamma(\gamma_d, \gamma_{xy}) = \gamma_d \cos \theta_i + \gamma_{xy} \sin \theta_i \quad (2-4-42)$$

### 1) $K_1$ 行列の各成分の算定式

$$\frac{\partial \tau_d}{\partial \gamma_d} = 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial \gamma}(\gamma_{\theta_i}, G_0, \tau_f) \cos^2 \theta_i \Delta \theta \quad (2-4-43)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_{xy}} = 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial \gamma}(\gamma_{\theta_i}, G_0, \tau_f) \sin^2 \theta_i \Delta \theta \quad (2-4-44)$$

$$\frac{\partial \tau_d}{\partial \gamma_{xy}} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_d} = 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial \gamma}(\gamma_{\theta_i}, G_0, \tau_f) \cos \theta_i \sin \theta_i \Delta \theta \quad (2-4-45)$$

なお、 $\partial F / \partial \gamma$ の算定式は、後で示す。

### 2) $K_2, K_3$ 行列の各成分の算定式 (その1)

$$\frac{\partial \tau_d}{\partial G_0} = 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial G_0}(\gamma_{\theta_i}, G_0, \tau_f) \cos \theta_i \Delta \theta \quad (2-4-46)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial G_0} = 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial G_0}(\gamma_{\theta_i}, G_0, \tau_f) \sin \theta_i \Delta \theta \quad (2-4-47)$$

$$\frac{\partial \tau_d}{\partial \tau_f} = 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial \tau_f}(\gamma_{\theta_i}, G_0, \tau_f) \cos \theta_i \Delta \theta \quad (2-4-48)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \tau_f} = 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial \tau_f}(\gamma_{\theta_i}, G_0, \tau_f) \sin \theta_i \Delta \theta \quad (2-4-49)$$

なお、 $\partial F / \partial G_0, \partial F / \partial \tau_f$ の算定式は、後で示す。

### 3) $K_2, K_3$ 行列の各成分の算定式 (その2)

過剰間隙水圧モデルでは、 $G_0$ と $\tau_f$ は、次式により算定される(2.2.2項参照)。まず、 $S_b = \min(\text{初期の } S_0, 0.4)$ とすると、

$S_0 \geq S_b$  の時、

$$\tau_f = \tau_{m0} S, \quad G_0 = \tau_f / \gamma_{m0} = (\tau_{m0} / \gamma_{m0}) S \quad (2-4-50)$$

$S_0 < S_b$  の時、

$$\tau_f = \tau_{m0} S + \Delta \tau_f, \quad G_0 = \tau_f / \gamma_m = (\tau_{m0} / \gamma_m) S + (\Delta \tau_f / \gamma_m) \quad (2-4-51)$$

なお、 $\Delta \tau_f$  は、 $S_0$  の関数ではあるが、 $S$  の関数では無いので、各時間ステップ内では、定数として扱う。また、 $\tau_{m0}$ 、 $\gamma_{m0}$ 、 $\gamma_m$  は、以下のように表される。

$$\tau_{m0} = |\sigma'_{m0}| \sin \phi_f \quad (2-4-52)$$

$$\gamma_{m0} = \tau_{m0} / \left( G_{ma} \left| \frac{\sigma'_{m0}}{\sigma'_{ma}} \right|^{m_G} \right) \quad (2-4-53)$$

$$\gamma_m = \gamma_{m0} / (S_0 / S_b) \quad (2-4-54)$$

これらより、次式を得る。

$S_0 \geq S_b$  の時、

$$\frac{\partial G_0}{\partial S} = \tau_{m0} / \gamma_{m0} \quad \frac{\partial \tau_f}{\partial S} = \tau_{m0} \quad (2-4-55)$$

$S_0 < S_b$  の時、

$$\frac{\partial G_0}{\partial S} = \tau_{m0} / \gamma_m \quad \frac{\partial \tau_f}{\partial S} = \tau_{m0} \quad (2-4-56)$$

#### 4) $K_2$ 、 $K_3$ 行列の各成分の算定式 (その3)

過剰間隙水圧モデルでは、状態変数  $S$  は、最大せん断応力の初期平均有効応力に対する比  $r$  と液状化フロント  $S_0$  の関数であるが、前述の通り  $S_0$  は各時間ステップ内では定数として扱う。まず、

$$r = r(\tau_d, \tau_{xy}) = \tau / |\sigma'_{m0}| = \sqrt{\tau_d^2 + \tau_{xy}^2} / |\sigma'_{m0}| \quad (2-4-57)$$

$$r_2 = S_0 \sin \phi_p \quad (2-4-58)$$

$$r_3 = 0.67 S_0 \sin \phi_p$$

とおく。 $r_2$  と  $r_3$  は、 $S_0$  の関数ではあるが、各時間ステップ内では、定数として扱う。これらを用いて、状態変数  $S$  は、以下のように表される。

$r \leq r_3$  の時、

$$S = S_0 \quad (2-4-59)$$

$r > r_3$  の時、

$$S = S_2 + \sqrt{(S_0 - S_2)^2 + ((r - r_3) / \sin \phi_f)^2} \quad (2-4-60)$$

なお、 $S_2$  は以下のように定義されるが、これも定数扱いとする。

$$S_2 = S_0 - (r_2 - r_3) / \sin \phi_f \quad (2-4-61)$$

これらから、以下の式が導かれる。

$r \leq r_3$ の時、

$$\frac{\partial S}{\partial \tau_d} = \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} = 0 \quad (2-4-62)$$

$r > r_3$ の時、

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tau_d} &= \left\{ (S_0 - S_2)^2 + \left( (r - r_3) / \sin \phi_f \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{(r - r_3)}{|\sigma'_{m0}| \sin^2 \phi_f} \frac{\tau_d}{\tau} \\ &= \frac{1}{S - S_2} \frac{r - r_3}{r} \frac{\tau_d}{\tau_{m0}^2} \end{aligned} \quad (2-4-63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} &= \left\{ (S_0 - S_2)^2 + \left( (r - r_3) / \sin \phi_f \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{(r - r_3)}{|\sigma'_{m0}| \sin^2 \phi_f} \frac{\tau_{xy}}{\tau} \\ &= \frac{1}{S - S_2} \frac{r - r_3}{r} \frac{\tau_{xy}}{\tau_{m0}^2} \end{aligned} \quad (2-4-64)$$

上記の(2-4-63)式と(2-4-64)式から、行列  $K_2$  と  $K_3$  は非対称行列であることが分かる。

#### 5) $F(\gamma, G_0, \tau_f)$ の微係数

前述の通り、多重せん断ばねモデルの各ばねのばね力  $F$  は、ばね変位  $\gamma$ 、初期せん断剛性  $G_0$ 、およびせん断強度  $\tau_f$  の関数であった。

$$F = F(\gamma, G_0, \tau_f) \quad (2-4-65)$$

骨格曲線上にあるばねについては、ばね力  $F$  とばね変位  $\gamma$  の間の関係は、正規化されたばね力  $y$  と正規化されたばね変位  $x$  との関係として与えられる (2.2.4 項参照)。すなわち、

$$y = y(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad (2-4-66)$$

ここに、 $x$  と  $y$  は、次式で定義される。

$$x = x(\gamma, G_0, \tau_f) = \frac{4 G_0}{\pi \tau_f} \gamma \quad (2-4-67)$$

$$y = \frac{4}{\tau_f} F \quad (2-4-68)$$

(2-4-66)式と(2-4-68)式から、次式を得る。

$$F(\gamma, G_0, \tau_f) = \frac{\tau_f}{4} y(x) \quad (2-4-69)$$

これを各変数について、偏微分を取る。

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma} = \frac{\tau_f}{4} \frac{dy}{dx} \frac{\partial x}{\partial \gamma} = \frac{G_0}{\pi} \frac{dy}{dx} \quad (2-4-70)$$

$$\frac{\partial F}{\partial G_0} = \frac{\tau_f}{4} \frac{dy}{dx} \frac{\partial x}{\partial G_0} = \frac{\gamma}{\pi} \frac{dy}{dx} \quad (2-4-71)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_f} = \frac{y}{4} + \frac{\tau_f}{4} \frac{dy}{dx} \frac{\partial x}{\partial \tau_f} = \frac{F}{\tau_f} - \frac{G_0 \gamma}{\pi \tau_f} \frac{dy}{dx} \quad (2-4-72)$$

ここで、(2-4-66)式より、 $dy/dx$ は次のように求まる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-|y|}{1+|x|} \quad (2-4-73)$$

骨格曲線から除荷した状態になった場合は、Masing 則 (Masing, 1926) を与えるのが通常である。しかし、Masing 則は、大きなひずみ領域では、砂を対象とする実験により得られる減衰定数より大きい減衰定数を与えることが知られている。そこで、前述の通り、適切な減衰定数を与えるために、まず、次式に示すように、 $x$ 軸と $y$ 軸のスケールを調整する (2-2 節参照)。

$$x' = x / \xi(x_1) \quad (2-4-74)$$

$$y' = y / \eta(x_1) \quad (2-4-75)$$

ここに、 $\xi(x_1)$ と $\eta(x_1)$ は、除荷時の $x$ 座標である $x_1$ の関数である。

スケールされたばね力 $y'$ とばね変位 $x'$ の間には、基本的に Masing 則に基づく関係を与える。すなわち、

$$y' = y'(x') \quad (2-4-76)$$

あるいは、

$$\frac{y' - y'_r}{2\delta} = \frac{\frac{x' - x'_r}{2\delta}}{1 + \left| \frac{x' - x'_r}{2\delta} \right|} \quad (2-4-77)$$

ここに、 $(x'_r, y'_r)$ は、最後に反転した点の座標であり、また、 $\delta$ の値は、Masing 則に基づき、骨格曲線から除荷した時には 1.0 の値を取り、その後、骨格曲線に再び戻るまでの間の奇数回目 (骨格曲線からの除荷を第 1 回と数える) の反転では、除荷点の反対側の骨格曲線上の点 $(-x'_1, -y'_1)$ を、偶数回目の反転では、除荷点 $(x'_1, y'_1)$ を目指すように調整される。

この場合は、(2-4-70)~(2-4-72)式に現れる $dy/dx$ は、次式により評価出来る。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x_1)}{\xi(x_1)} \frac{dy'}{dx'} \quad (2-4-78)$$

ここに、 $dy'/dx'$ は、次式により評価出来る。

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{1 - \left| \frac{y' - y'_r}{2\delta} \right|}{1 + \left| \frac{x' - x'_r}{2\delta} \right|} \quad (2-4-79)$$

### 6) $K_4$ 行列の各成分の算定式

$K_4$  行列の成分算定法を示す。

$$K_4 = \frac{d\varepsilon_{vp}}{dS} \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial S}{\partial \tau_d} & \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} \end{array} \right] K \quad (2-4-80)$$

上式で、 $d\varepsilon_{vp}/dS$  以外の項の算定法は、既に示した。ここでは、 $d\varepsilon_{vp}/dS$  の算定法を示す。まず、体積塑性ひずみは、次式で表される。

$$\varepsilon_{vp} = (-\sigma'_{m0} S/B)^{1-m_K} + \sigma'_{m0} (1-S)n/K_f + \varepsilon_{ve0} \quad (2-4-81)$$

ここに、 $\varepsilon_{ve0}$  は、当解析フェーズでの体積弾性ひずみの初期値を表し、 $\sigma'_{m0}$  に対応する。また、 $n$  は間隙率、 $K_f$  は間隙水の体積剛性を表す。上式を  $S$  で微分すると、次式を得る。

$$d\varepsilon_{vp}/dS = (1-m_K)(-\sigma'_{m0} S/B)^{-m_K} (-\sigma'_{m0}/B) - \sigma'_{m0} n/K_f \quad (2-4-82)$$

### (3) 状態変数 $S$ の収束計算

上述のように、各時間ステップ内で状態変数  $S$  の変動を考慮する。従って、非線形反復計算においては、状態変数  $S$  の関数である  $\{\sigma'\}$  と  $d\{\sigma'\} \sim d\{\varepsilon\}$  関係 ((2-4-33)式あるいは(2-4-35)式の係数行列) の算定の際には、以下に示す手順に従って求めた状態変数  $S$  を参照する。

- ① 状態変数  $S$  に前時間ステップでの収束値をセットする。
- ② 砂の力学モデルにより、ひずみ  $\{\varepsilon\}$  と状態変数  $S$  に応じて、応力  $\{\sigma'\}$  を算定する。  
なお、この際、液状化フロントパラメータ  $S_0$  としては、常に、前時間ステップでの収束値を参照する。
- ③ 応力  $\{\sigma'\}$  に応じた状態変数  $S_{new}$  を算定する ((2-4-60)式)。
- ④  $S$  の収束判定を、以下の(2-4-83)式または(2-4-84)式により行う。

$$|S_{new} - S| \leq tol \quad (2-4-83)$$

$$|S_{new} - S|/S \leq tol \quad (2-4-84)$$

なお、既に実施した複数の事例解析によると、(2-4-83)式を用い、 $tol=1.0 \times 10^{-5}$  とすることが適当である。未収束ならば、状態変数  $S$  に  $S_{new}$  の値を代入して、②に戻る。

- ⑤ 状態変数  $S$  の収束値を用いて、必要に応じて、以下の諸量を算定する。

- ・ 応力  $\{\sigma'\}$
- ・  $d\{\sigma'\} \sim d\{\varepsilon\}$  関係 ((2-4-33)式あるいは(2-4-35)式の係数行列)

なお、 $d\{\sigma'\} \sim d\{\varepsilon\}$  関係は、(2-4-35)式の係数行列 (対称行列) に基づいて組み立てるか、(2-4-33)式の係数行列 (非対称行列) に基づいて組み立てる。前者は全体接線剛性行列が対称となり、後者は非対称となる。一般に、線形連立方程式を解くのに、非対称の係数行列は不利であるが、後述する矢板式岸壁の例題では、(2-4-33)式の非対称行列に基づいた方が、上記手順による状態変数  $S$  の収束が早く、また、全体系の平衡方程式の収束性もよく、計算時間も短かった。

なお、レーレー減衰行列の組立に用いる接線剛性行列としては、常に、対称化された(2-4-35)式の係数行列を使用する。

#### (4) 改良型非線形反復計算法の適用性

ここでは、前節で示した各時間ステップ内で状態変数  $S$  の変動による骨格曲線の変動に追従する非線形反復計算法（以下、改良型非線形反復計算法）の応答加速度時刻歴に見られる異常振動の解消効果と、非線形反復計算法の違いによる変位などへの影響を調べる。

##### (a) 要素シミュレーション

等価  $N$  値（有効上載圧 65kPa に換算した  $N$  値）が 10 である砂を対象に要素シミュレーションを行った。要素シミュレーションでは、まず、完全排水条件下で、有効拘束圧 98kPa で等方圧密し、その状態を引き継いで、非排水条件下で、片振幅 25kPa の繰り返し単純せん断（準静的）を行った。その際、水平成層地盤と同様、水平方向の直ひずみは生じないように拘束を与えた。解析ケースは以下の通りである。

- ① 従来型非線形反復計算法。
- ② 改良型非線形反復計算法で、接線剛性行列は対称とする。  
( $d\{\sigma\} \sim d\{\varepsilon\}$  関係に(2-4-35)式使用)
- ③ 改良型非線形反復計算法で、接線剛性行列は非対称とする。  
( $d\{\sigma\} \sim d\{\varepsilon\}$  関係に(2-4-33)式使用)

上記②と③のケースについては、状態変数  $S$  の収束判定は、(2-4-83)式により行い、許容誤差は  $tol=1.0 \times 10^{-5}$  とした。

等価  $N$  値 10 の砂は、細粒分を含まないものとして、その解析地盤定数は、森田ら (1997) の簡易設定法<sup>3)</sup>により決定した。解析地盤定数を表 2-4-1および表 2-4-2に示す。変相線を超えた領域における塑性せん断仕事の負のダイレタンシーへの寄与係数の設定法として従来モデルを使用した。

解析結果である、過剰間隙水圧比上昇曲線、せん断ひずみ増大曲線、せん断応力-せん断ひずみ関係および有効応力経路に関する各ケースの比較を図 2-4-3に示す。改良型非線形反復計算法のケース②と③は、曲線が重なっていて判別できないが、従来法と比べると、ほぼ同じ傾向ではあるが、ひずみが若干抑えられている。また、従来見られていた、せん断応力-せん断ひずみ関係のピーク付近で曲線が小さなループを描く現象も、改良型非線形反復計算法の両ケースでは解消された。

このことから、通常行われるような砂の要素試験に対応した要素シミュレーションにおいては、非線形反復計算法の違いによる応答の差異は顕著ではないことが分かった。

表 2-4-1 等価 N 値 10 の砂 : 多重せん断機構モデルなどのパラメータ

土質	等価 N 値 ( $N_{65}$ )	湿潤 密度 ( $\rho_t$ ( $t/m^3$ ))	間隙 率 $n$	変形特性							
				初期 せん断 剛性 $\hat{G}_{ma}$ (kPa)	体積 弾性 係数 $K_{ma}$ (kPa)	基準化 拘束圧 $\sigma_{ma}'$ (kPa)	ポアソン 比 $\nu$	拘束圧 依存 係数 $m$	内部 摩擦 角 $\phi_f$ ( $^\circ$ )	粘着 力 $C$ (kPa)	履歴 減衰 上限値 $h_{max}$
砂質土	10	2.00	0.45	84490	220300	98.0	0.33	0.50	39.7	0.0	0.24

※  $m_G=m_K=m$  とする。

表 2-4-2 等価 N 値 10 の砂 : 過剰間隙水圧発生モデルのパラメータ

土質	等価 N 値 ( $N_{65}$ )	液状化特性					
		変相角 $\phi_p$ ( $^\circ$ )	液状化パラメータ				
			$w_l$	$p_1$	$p_2$	$c_l$	$S_l$
砂質土	10	28.0	3.76	0.50	1.01	1.60	0.005

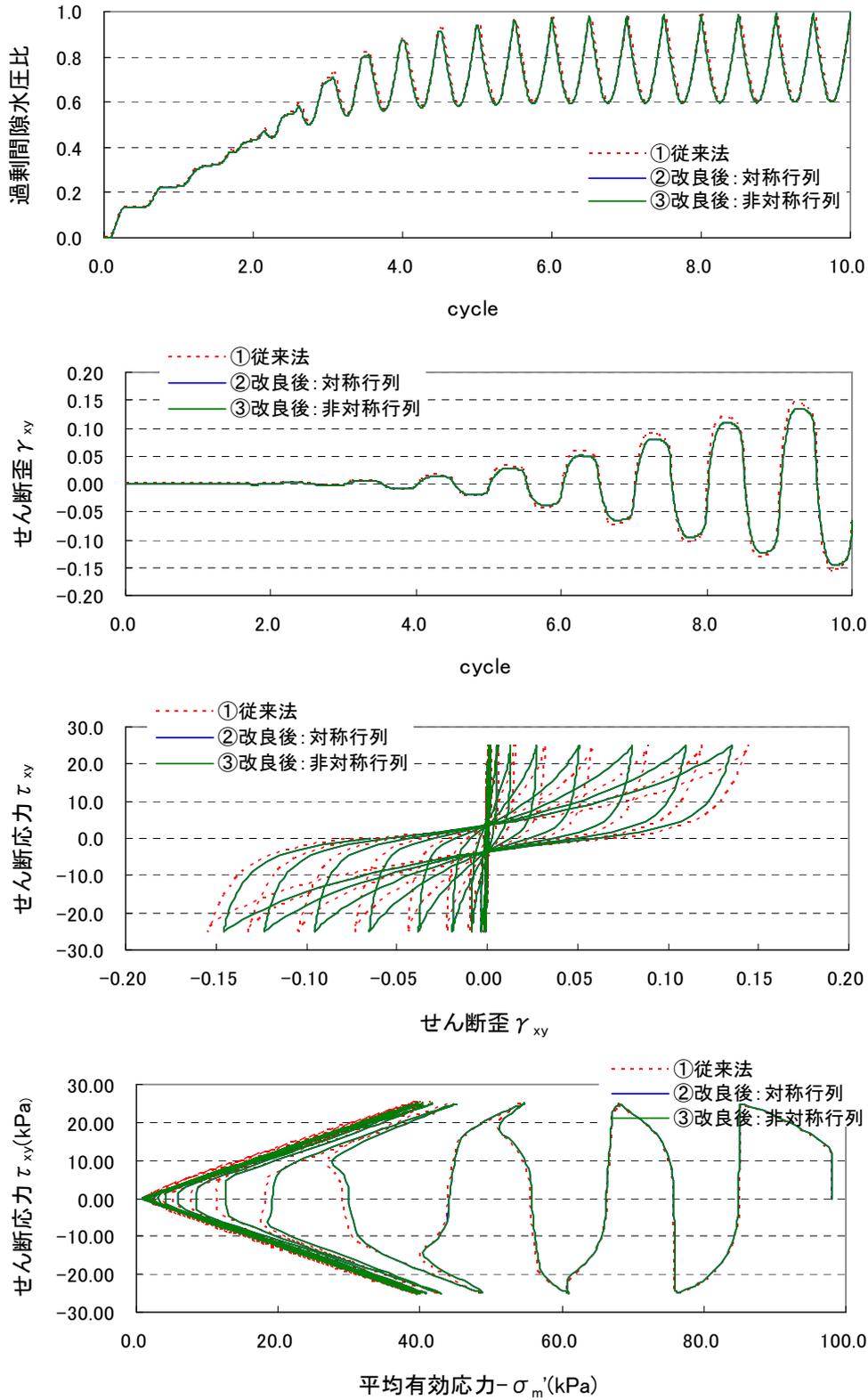


図 2-4-3 等価 N 値 10 の砂の要素シミュレーション結果：従来型非線形反復計算法（破線）と、改良型非線形反復計算法 2 ケース（重なっている実線）との比較

## (b) 1次元地盤モデル

港湾地域強震観測網の釧路港観測施設付近の地盤を対象に、1993 釧路沖地震の際の挙動の従来型および改良型非線形反復計算法を用いた再現計算を行った。同地点の土層区分図を図 2-4-4 (Iai ら, 1995) に示す。地盤は地表から GL.-77m の地中地震計設置位置まで主に砂層で構成され、わずかにシルト層を挟む。地表から GL.-23m までは粗砂層であり、地表面付近を除き N 値は 30 以上ある。その下の GL.-52m までは細砂層を主体とし、シルト層や礫混じり砂層を挟む。N 値は 10 以下から 50 以上と幅がある。その下は、細砂が主体であり、N 値は 50 以上である。

この地盤を対象に 1 次元の地盤モデルを作成した。各土層の多重せん断機構モデルのパラメータを表 2-4-3 に示す。Layer2 と 3 のみ過剰間隙水圧モデルを適用し、深部などで液状化が発生しないと判断した土層に対しては過剰間隙水圧モデルを適用せず、多重せん断ばねモデルのみでその挙動を表現する。

この 1 次元地盤モデルを用いて、まず、完全排水条件下で初期自重解析を行い、重力が作用した状態を引き継いで、非排水条件下で地震応答解析を行った。入力地震動は、1993 釧路沖地震の際に同観測施設の地中 (GL-77m) の地震計で記録された NS 成分の加速度時刻歴 (最大加速度 204gal) とし (図 2-4-5)、固定境界とした解析モデル底面に入力した。また、地表で記録された対応する加速度時刻歴を図 2-4-6 に示す。

従来型非線形反復計算法では、時間積分間隔  $\Delta t$  を小さくすると、応答加速度時刻歴にスパイク状のピークが多発する傾向があるので、それに対する改良型非線形反復計算法の効果を確認するために、以下に示す①～③の非線形反復計算法のそれぞれに対して、時間積分間隔を 0.01 秒、0.005 秒、0.0025 秒とした場合の解析を実施した。

- ① 従来型非線形反復計算法
- ② 改良型非線形反復計算法で、接線剛性行列は対称とする。  
( $d\{\sigma'\} \sim d\{\varepsilon\}$  関係に (2-4-35) 式使用)
- ③ 改良型非線形反復計算法で、接線剛性行列は非対称とする。  
( $d\{\sigma'\} \sim d\{\varepsilon\}$  関係に (2-4-33) 式使用)

上記②と③のケースについては、状態変数  $S$  の収束判定は、(2-4-83) 式により行い、許容誤差は  $tol=1.0 \times 10^{-5}$  とした。また、変相線を超えた領域における塑性せん断仕事の負のダイランシーへの寄与係数設定法としては従来モデルを使用した。

地表における水平応答加速度時刻歴および水平応答変位時刻歴 (いずれも解析値) を、それぞれ、図 2-4-7 と図 2-4-8 に示す。また、GL-3.5m (Layer2) における過剰間隙水圧比 ( $=1 - \sigma'_m / \sigma'_{m0}$ ) の時刻歴、有効応力経路図およびせん断応力-せん断ひずみ関係を、それ

ぞれ、図 2-4-9、図 2-4-10、図 2-4-11に示す。

これらの図によれば、改良型非線形反復計算法（②と③）では、応答加速度時刻歴にスパイク状のピークが多発する傾向は改善された。また、接線剛性行列を対称としても、非対称としても、応答に差異はほとんど見られなかった。

図 2-4-6に示した同地震の際に地表で記録された加速度波形と図 2-4-7の各波形を比較すると、観測記録に見られる鋸歯状の波形は、 $\Delta t=0.01$  秒の場合は、従来型非線形反復計算法がよく再現している。改良型非線形反復計算法では、 $\Delta t=0.01$  秒の波形は、減衰が効きすぎるのか、特徴的なスパイク状のピークがなまってしまうが、 $\Delta t=0.0025$  秒では、観測記録と同様のスパイク状のピークが見られる。時間積分法として、Wilson  $\theta$  法 ( $\theta=1.4$ ) を用いたが、それによる人工減衰が働いた結果である。このことは、表 2-4-4に示した時間積分法と時間積分間隔に応じた、人工減衰が働くための振動数の下限値との関係を見ると分かる。

図 2-4-9によると、①の従来型非線形反復計算法では、Layer2 の過剰間隙水圧が 13 秒付近から急に上昇して、17 秒付近で上がりきるのに対して、②と③の改良型では、水圧上昇が急では無く、17 秒付近でも 50%程度の水圧上昇である。また、図 2-4-10に示すせん断応力-せん断ひずみ関係を見ると、①の方法では、②と③の方法に比べて、どの時間刻みでも、大きなせん断ひずみが見られる。これを反映して、図 2-4-8に示す地表面の水平変位時刻歴には、①の場合に数 cm の残留変位が生じたが、②と③のケースについては、残留変位は生じない。このように、応力-ひずみ関係が変動するような砂の力学モデルを使用する場合は、各時間ステップ内で変動を追跡して、不平衡力を次ステップに持ち越さないことが重要であり、そうしない場合には、非線形反復計算法に起因する誤差が累積して、変位やひずみの応答にも影響を与えることになる。

表 2-4-3 釧路港 1 次元地盤モデル：解析地盤定数<sup>4)</sup> (Iai ら,1995)

Layer No.	H (m)	$\rho$ (t/m <sup>3</sup> )	Vs (m/s)	G <sub>ma</sub> (kPa)	$-\sigma'_{ma}$ (kPa)	$\phi_f$ (度)	$\phi_p$ (度)	液状化パラメータ				
								w1	p1	p2	c1	s1
1	2.0	1.54	249	106600	37	40	—	—	—	—	—	—
2	7.0	1.72	249	106600	37	40	28	7.0	0.50	0.65	3.97	0.01
3	14.0	1.98	326	210400	98	48	28	3.5	0.50	0.40	3.68	0.01
4	9.0	1.73	265	121500	164	37	—	—	—	—	—	—
5	4.0	1.76	341	204700	195	44	—	—	—	—	—	—
6	8.0	1.70	286	139100	224	44	—	—	—	—	—	—
7	8.0	2.00	302	182400	269	45	—	—	—	—	—	—
8	25.0	1.73	341	201200	354	44	—	—	—	—	—	—

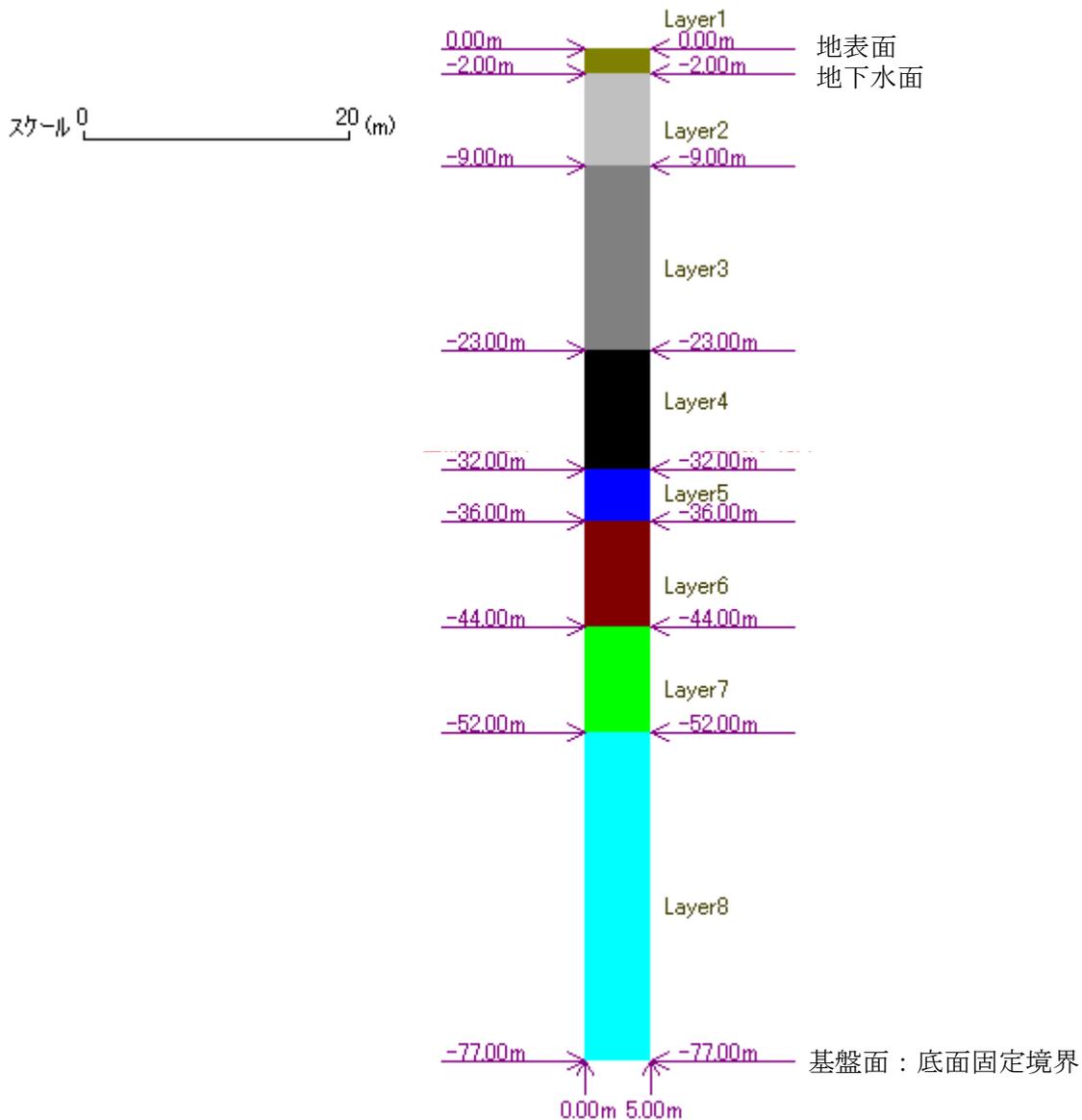


図 2-4-4 釧路港 1 次元地盤モデル：土層区分図 (Iai ら<sup>4)</sup> 図 2-4-10(1995)に加筆)

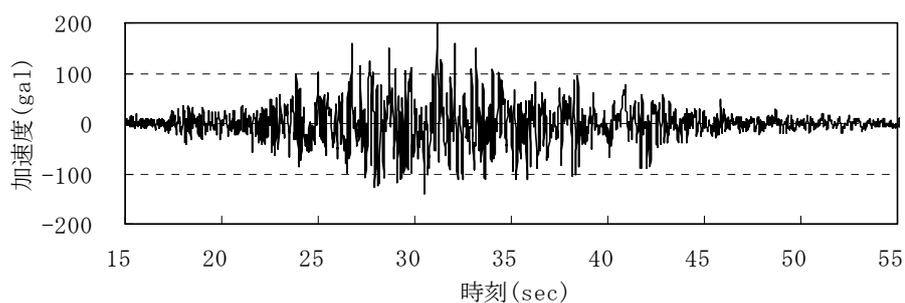


図 2-4-5 1993 釧路沖地震の際に釧路港二層観測地点の地中 (GL-77m) 地震計で記録された NS 成分の加速度記録のうち、解析で用いた 15 秒から 55 秒までの 40 秒間の波形

表 2-4-4 時間積分間隔と人工減衰が働くための振動数の下限値との関係

$\Delta t =$	0.01秒	0.005秒	0.0025秒
Wilson $\theta$ 法 ( $\theta = 1.4$ )	10Hz	20Hz	40Hz
Newmark法 ( $\alpha = 0.3025, \delta = 0.6$ )	3Hz	6Hz	12Hz
Newmark法 ( $\alpha = 0.25, \delta = 0.5$ )	人工減衰は、発揮されない。		

※1 表に示す振動数以上の現象に対しては人工減衰が発揮される。

※2 Zienkiewicz (1991) に基づいて算定した。

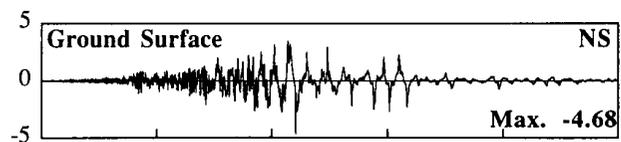


図 2-4-6 1993 釧路沖地震の際に釧路港二層観測地点の地表 (GL±0m) 地震計で記録された NS 成分の加速度記録 (縦軸の単位は  $m/s^2$ , 横軸の目盛は 10 秒刻み)

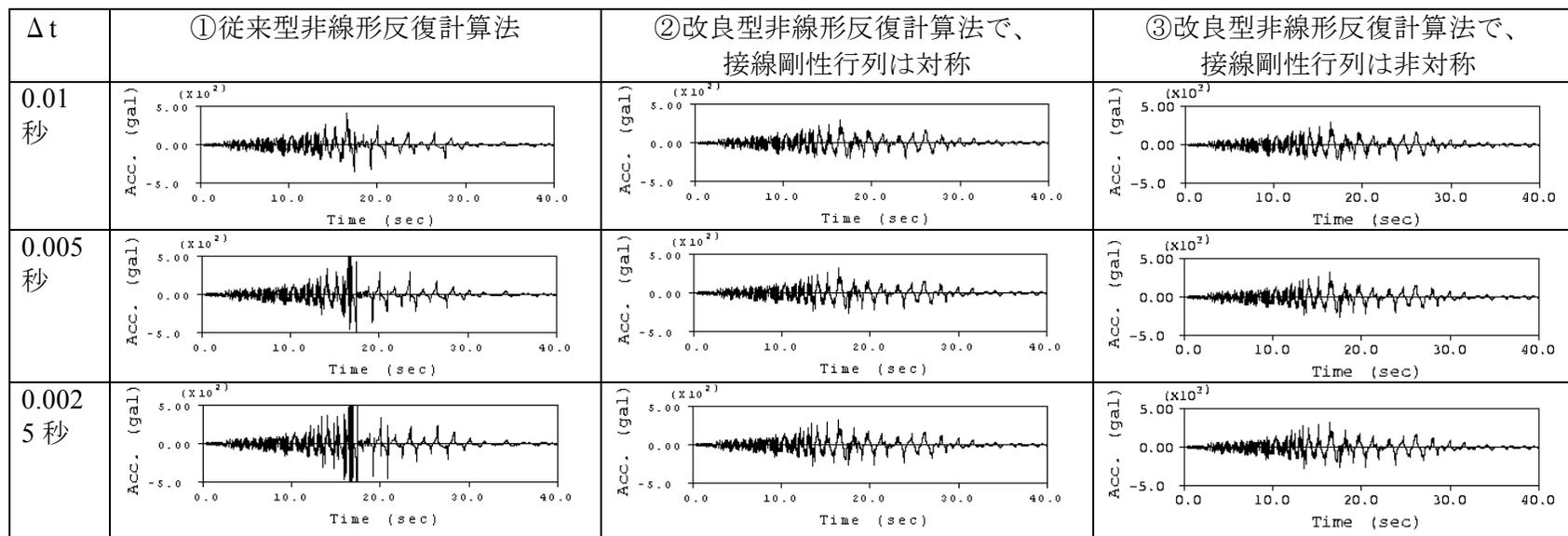


図 2-4-7 釧路港 1 次元地盤モデルの解析結果：地表面における水平加速度時刻歴 (縦軸：加速度 -500gal ~ +500gal、横軸：時間 (秒))

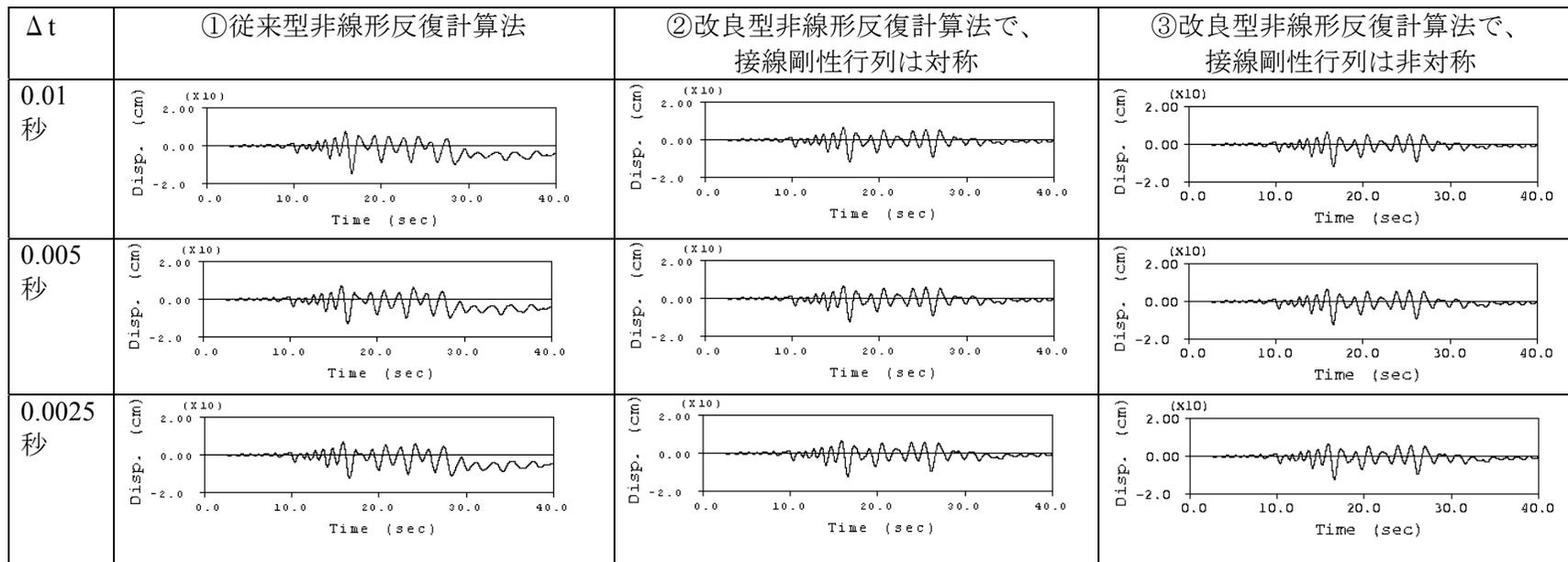


図 2-4-8 釧路港 1 次元地盤モデルの解析結果：地表面における水平相対変位時刻歴（縦軸：変位-20cm~+20cm、横軸：時間（秒））

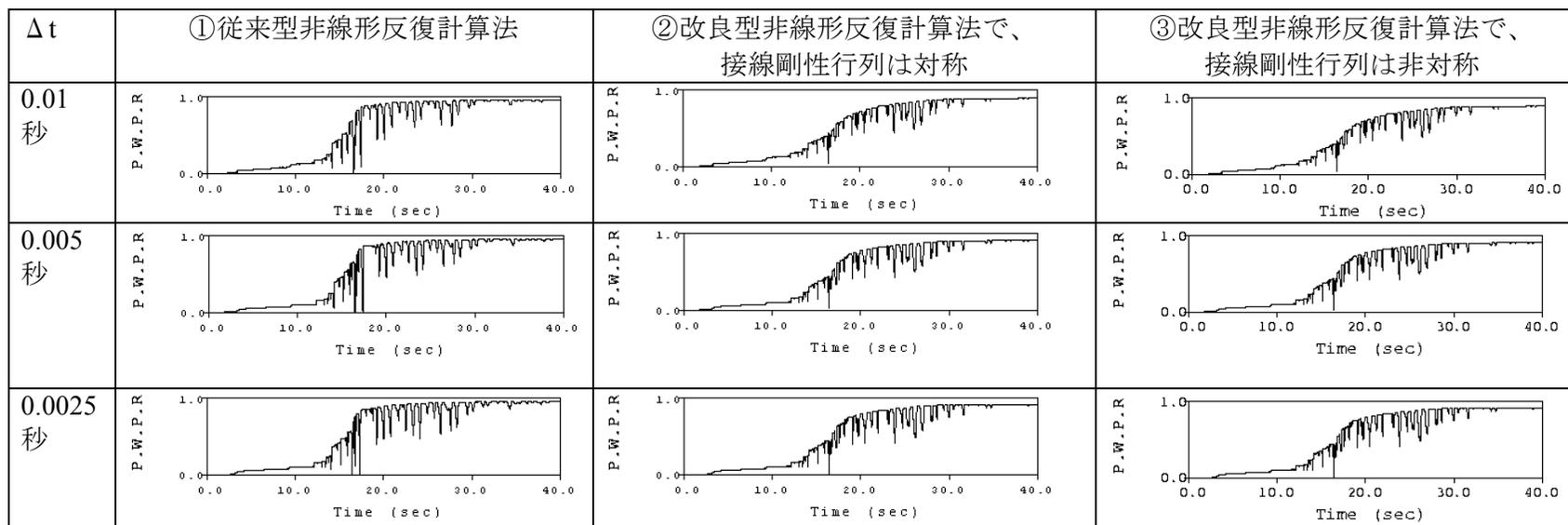


図 2-4-9 釧路港 1 次元地盤モデルの解析結果 : GL-3.5m (Layer2) における過剰間隙水圧比 ( $=1 - \sigma'_m / \sigma'_{m0}$ ) 上昇曲線

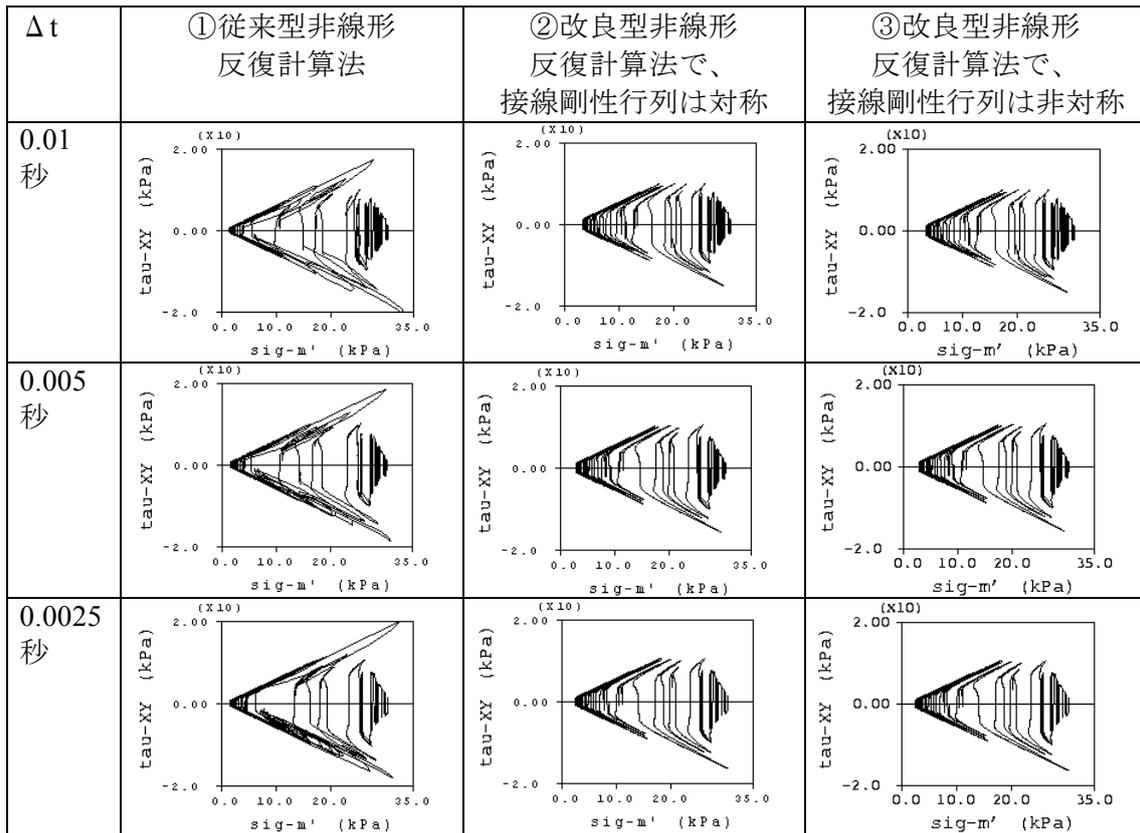


図 2-4-10 釧路港 1 次元地盤モデルの解析結果：

GL-3.5m (Layer2) における有効応力経路図 (縦軸  $\tau_{xy}$  (kPa)、横軸  $\sigma'_m$  (kPa))

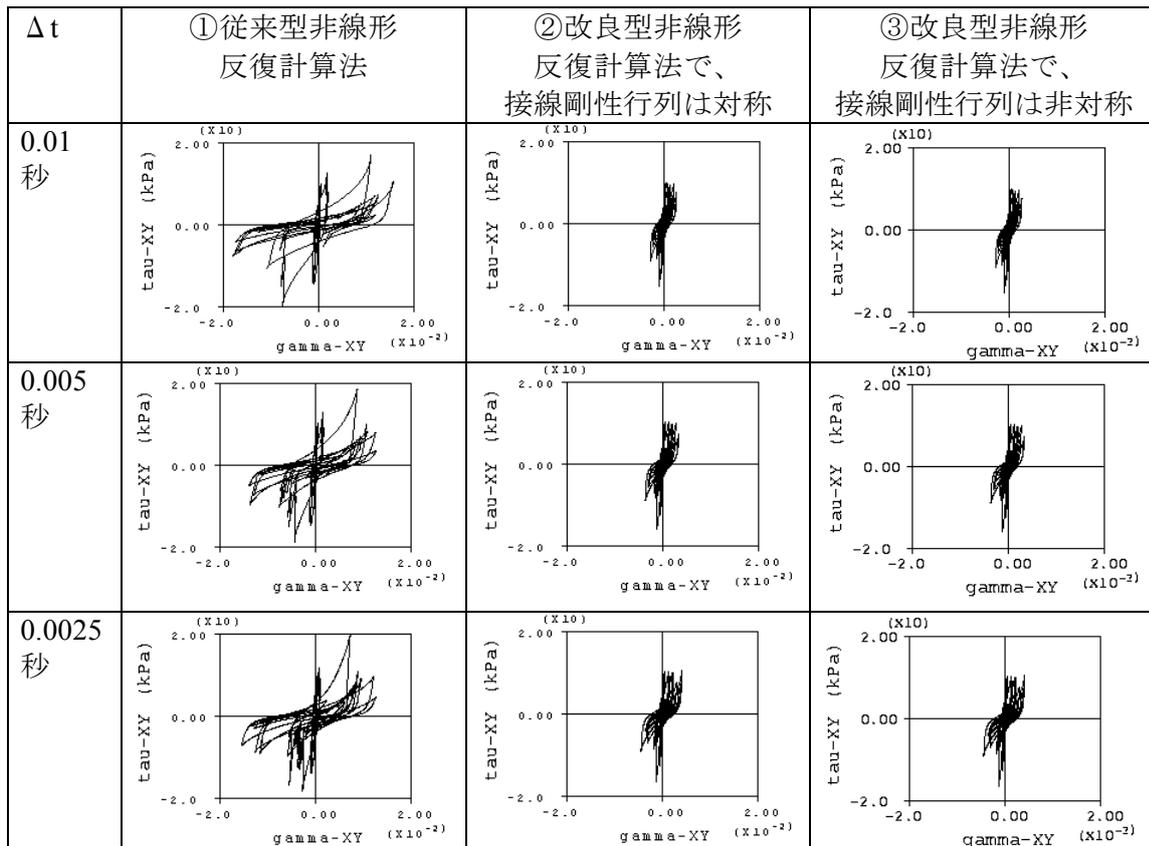


図 2-4-11 釧路港 1 次元地盤モデルの解析結果：

GL-3.5m (Layer2) におけるせん断応力-せん断ひずみ関係

(縦軸： $\tau_{xy}$  (kPa) -20kPa~+20kPa、横軸： $\gamma_{xy}$ -0.02~+0.02)

### (c) 矢板式岸壁

1983 日本海中部地震の際に液状化により大きな被害を受けた矢板式の秋田港大浜 2 号岸壁の 2 次元モデルを利用して、改良型非線形反復計算法の応答加速度時刻歴におけるスパイク状のピーク出現を抑制する効果と、非線形反復計算法の違いが変位や部材応答に与える影響について調べる。

この岸壁の 2 次元動的有効応力法による解析は、既に、Iai ら<sup>5)</sup> (1993) が行っている。ここでは、この解析モデルを参照して、図 2-4-12 および表 2-4-5 に示す解析モデルを設定し、解析を行った。解析では、地震前の地盤の初期応力状態をなるべく忠実に再現すべく、井合ら (2001) が提案した手順<sup>6)</sup>に基づき、埋め立て地盤における矢板式岸壁の施工過程を考慮した 3 段階の自重解析を、完全排水条件下で行った。また、自重解析結果を引き継いで、非排水条件下で地震応答解析を実施した。地震応答解析の際には、変相線を超えた応力空間においてなされる塑性せん断仕事の負のダイレタンシーへの寄与程度を見直したモデル (修正モデルで第 2 変相角  $\phi_{p2}$ =変相角とした: 2-3 節参照) を使用した。

入力地震動は、港湾地域強震観測網の秋田港観測地点で記録された地表面加速度波形をせん断波速度  $V_s=390\text{m/s}$  の工学的基盤の入射波 (2E) に引き戻し、それを大浜 2 号岸壁の法線直角方向に方位変換したものであり (図 2-4-13 参照)、この地震動を解析断面の入力波として、解析モデルの底面粘性境界に与えた。解析時間は地震動の主要部分 60 秒間で、解析の時間刻みは 0.01 秒とした。

解析ケースは、以下の通りである。

- ① 従来型非線形反復計算法。
- ② 改良型非線形反復計算法で、接線剛性行列は対称とする。  
( $d\{\sigma\} \sim d\{\varepsilon\}$  関係に (2-4-35) 式使用)
- ③ 改良型非線形反復計算法で、接線剛性行列は非対称とする。  
( $d\{\sigma\} \sim d\{\varepsilon\}$  関係に (2-4-33) 式使用)

上記②と③のケースについては、状態変数  $S$  の収束判定は、(2-4-83) 式により行い、許容誤差は  $tol=1.0 \times 10^{-5}$  とした。

ケース①について、前面矢板天端での水平変位時刻歴、水平加速度時刻歴、鉛直加速度時刻歴および控え矢板天端での水平変位時刻歴、水平加速度時刻歴、鉛直加速度時刻歴を図 2-4-14 に示す。同様に、ケース② (対称接線行列) については図 2-4-15 に、ケース③については図 2-4-16 に示す。

これらの図によれば、従来型非線形反復法では応答加速度時刻歴が乱れているのに対して、改良型非線形反復計算法では改善されている。

図 2-4-17には、残留変形図および過剰間隙水圧比（ $\equiv 1 - \sigma_m / \sigma_{m0}$ ）の残留値分布と時間最大値分布をケース①、②、③について比較した図を示す。これらの図によれば、ケース①と②の矢板背後の地表面で多少変形が大きい以外は、ほとんど違いが認められない。一方、表 2-4-6には、各種部材に発生する断面力と前面矢板天端における残留変位量の、ケース①、②、③についての比較を示す。この表によると、ケース①の場合の断面力／変位は、ケース②、③に比べて大きい。矢板式岸壁の地震応答解析では、例えば矢板受働側地盤は軸差応力の作用下で繰り返しせん断されることから、その応力経路は破壊線に沿って上下するものであり、その場合には正のダイランシーの影響で応力－ひずみ関係が変動する。非線形反復計算法もこの変動に対応したものを使用しないと、非線形反復計算法に起因する誤差が累積して、変位や部材の応答に影響を与えることになる。なお、応答値の絶対値の検討は、非線形反復計算法以外にも種々の要因が影響していることから、ここでは取り上げない。

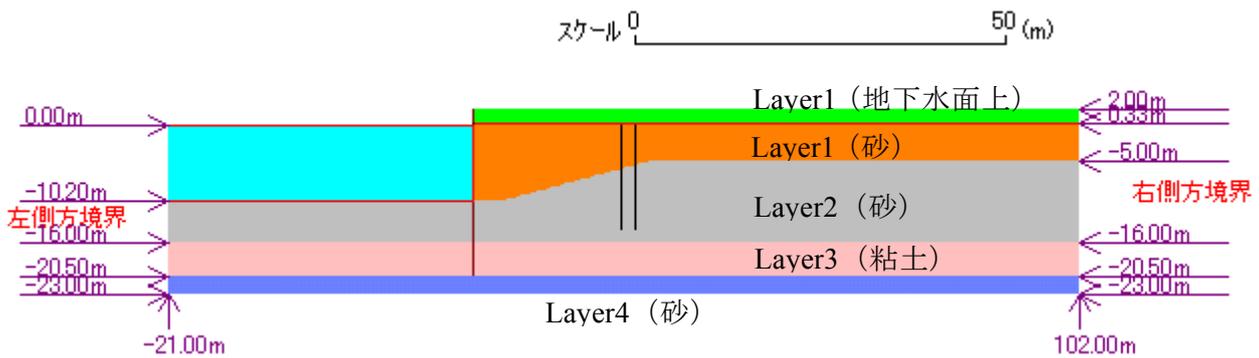


図 2-4-12 秋田港大浜 2 号岸壁 土層区分図 (Iai ら (1993) <sup>5)</sup>に基づく)

表 2-4-5 各土層の解析地盤定数 (Iai ら (1993) <sup>5)</sup>に基づく)

	Layer 1	Layer 2	Layer 2'	Layer 3	Layer 4
$G_{ma}$ (kPa)	33800	72200	72200	74970	168200
$K_{ma}$ (kPa)	89930	192100	192100	199470	447530
$\sigma_{ma}'$ (kPa)	50	110	69	140	157
$\phi_f$ (deg)	37	41	43	39	44
$\phi_p$ (deg)	30	30	30	—	30
$w_l$	0.5	8.5	14.0	—	3.8
$p_1$	0.4	0.5	0.5	—	0.5
$p_2$	0.42	0.8	1.0	—	0.84
$c_l$	1.5	3.3	4.6	—	2.4
$S_l$	0.005	0.005	0.005	—	0.005

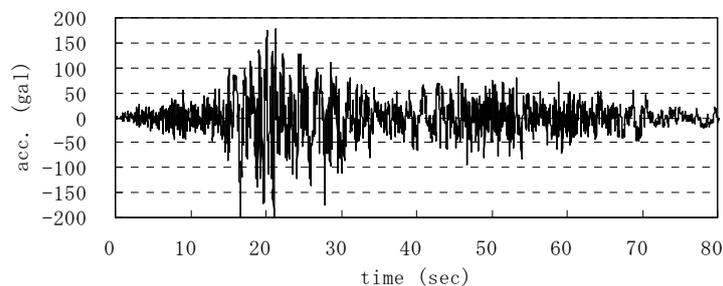


図 2-4-13 入力地震動：港湾地域強震観測網の秋田港観測地点で記録された地表面加速度波形をせん断波速度  $V_s=390\text{m/s}$  の工学的基盤の入射波 (2E) に引き戻し、それを大浜 2 号岸壁の法線直角方向に方位変換したもの。解析では、先頭から 60 秒間を使った。

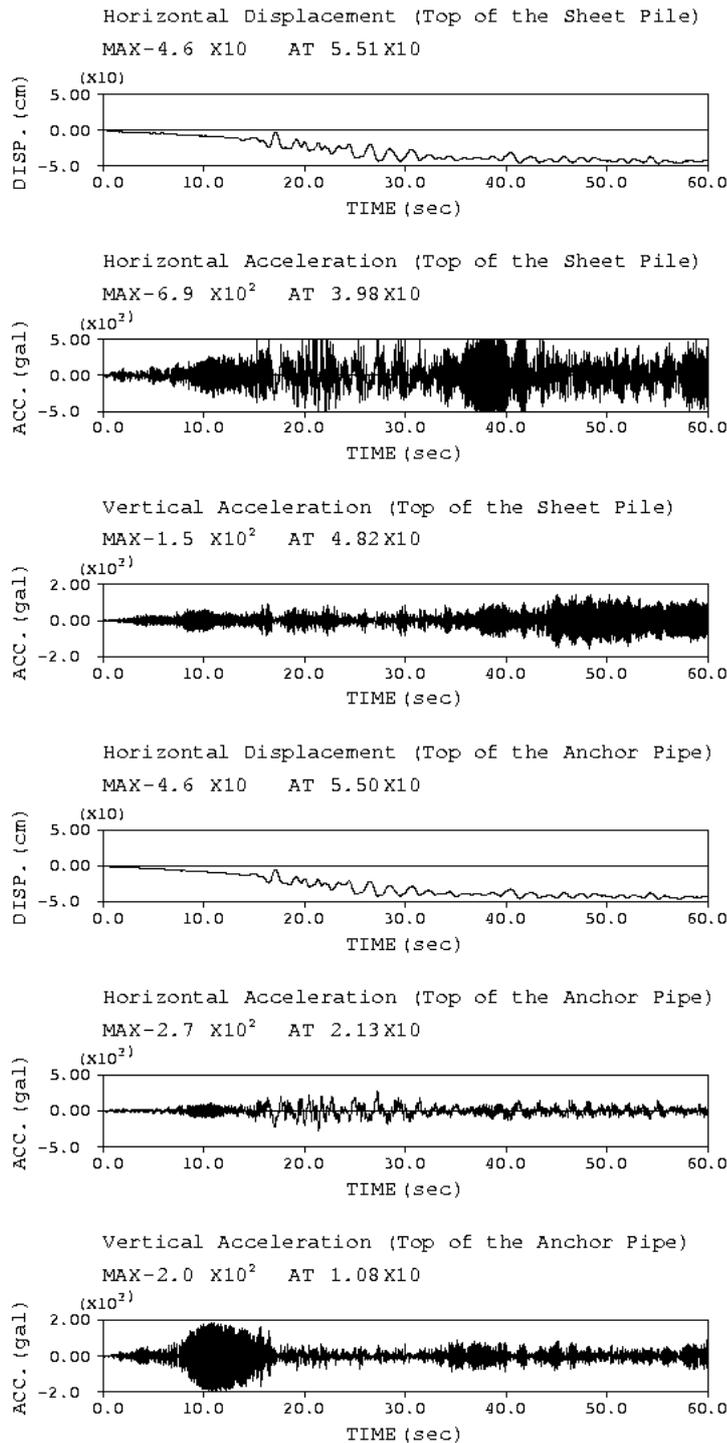


図 2-4-14 ケース①の矢板式岸壁の地震応答解析結果：

上から順に、前面矢板天端での水平変位時刻歴、水平加速度時刻歴、鉛直加速度時刻歴、  
控え矢板天端での水平変位時刻歴、水平加速度時刻歴、鉛直加速度時刻歴

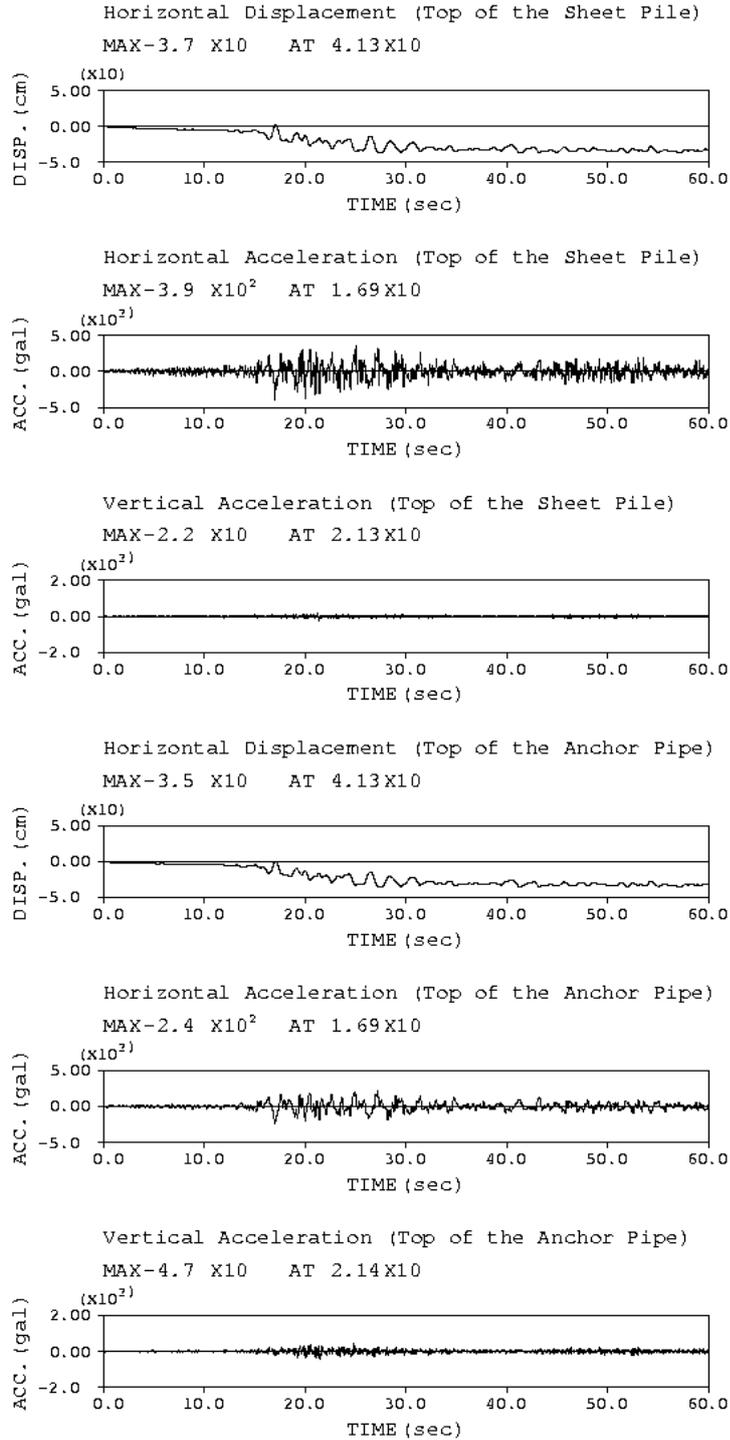


図2-4-15 ケース②の矢板式岸壁の地震応答解析結果：

上から順に、前面矢板天端での水平変位時刻歴、水平加速度時刻歴、鉛直加速度時刻歴、  
控え矢板天端での水平変位時刻歴、水平加速度時刻歴、鉛直加速度時刻歴

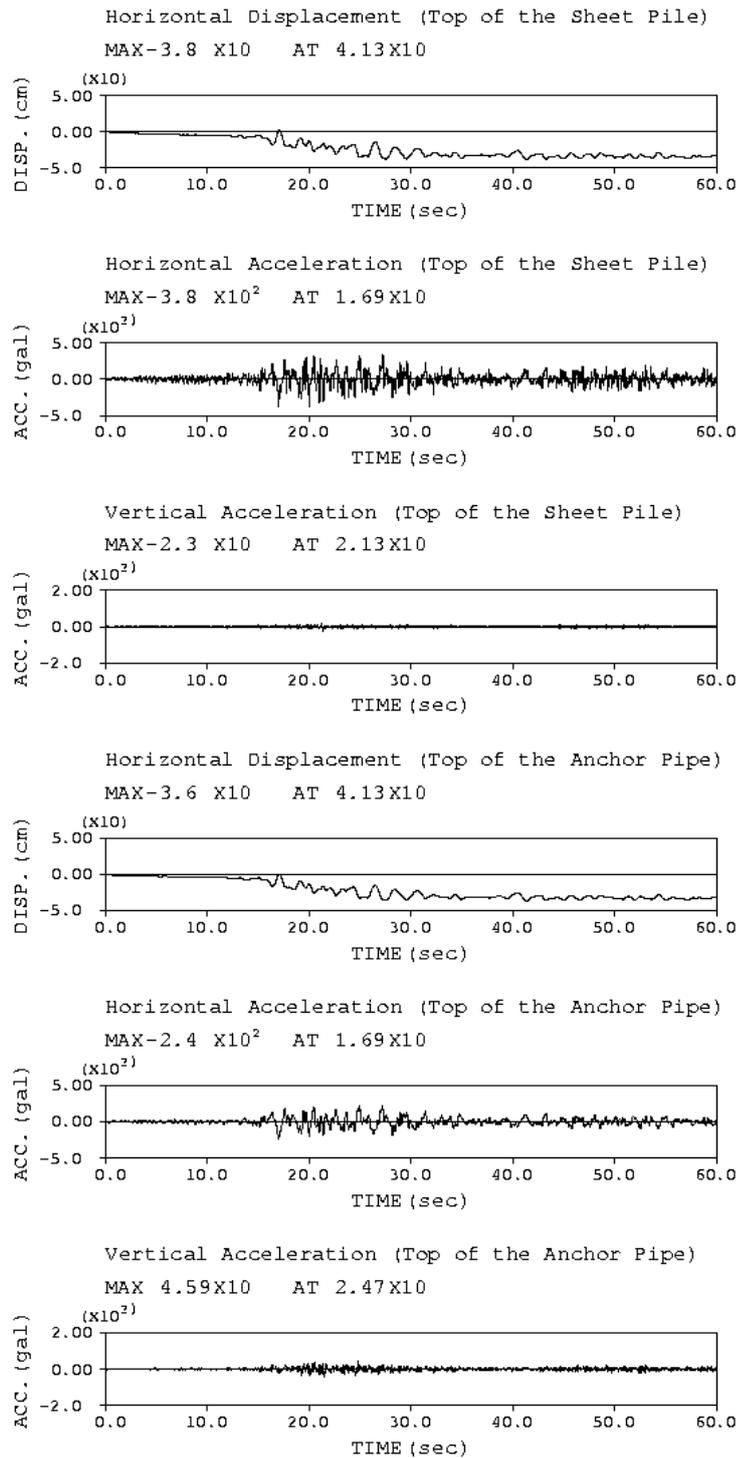


図 2-4-16 ケース③の矢板式岸壁の地震応答解析結果：

上から順に、前面矢板天端での水平変位時刻歴、水平加速度時刻歴、鉛直加速度時刻歴、  
控え矢板天端での水平変位時刻歴、水平加速度時刻歴、鉛直加速度時刻歴

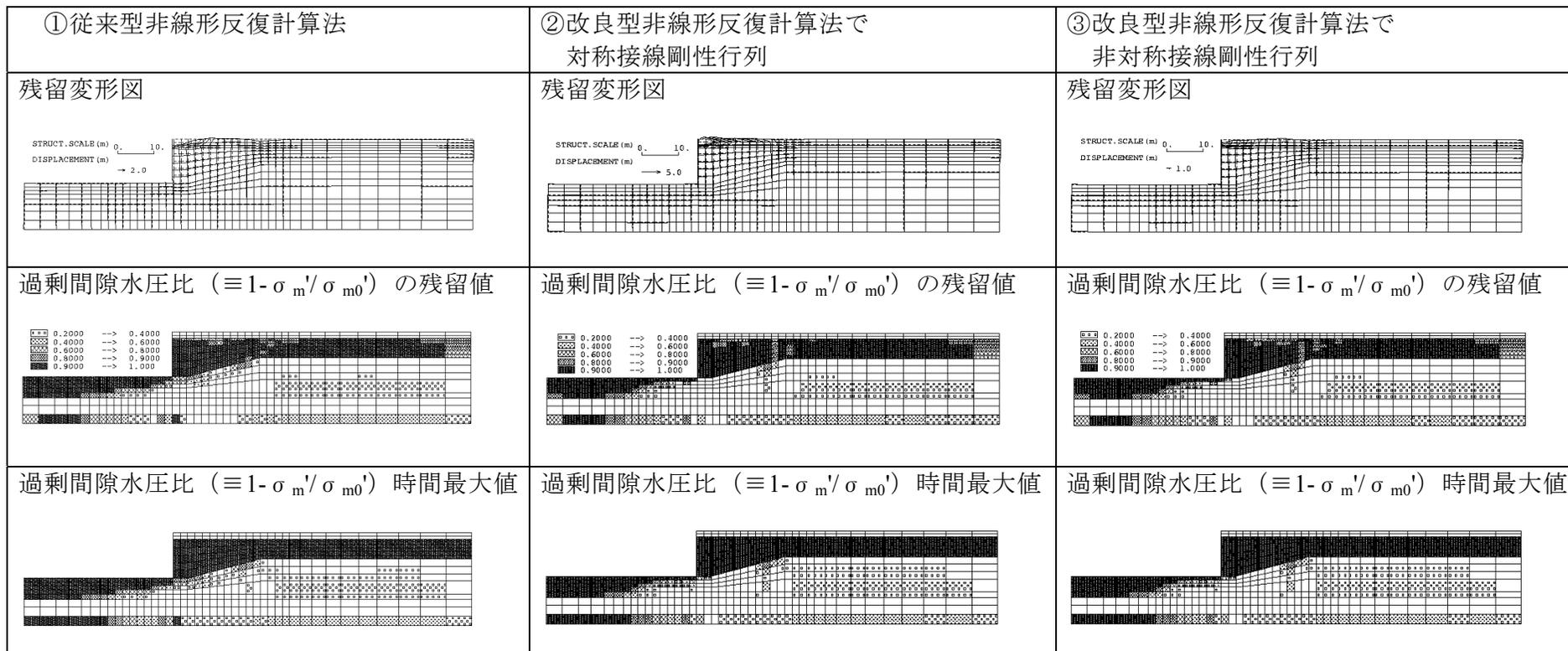


図 2-4-17 秋田港大浜 2 号岸壁 残留変形図、過剰間隙水圧比 ( $\equiv 1 - \sigma_m' / \sigma_{m0}'$ ) の残留値と時間最大値の比較

表 2-4-6 秋田港大浜 2 号岸壁 部材断面力および矢板天端残留変位の比較

		前面鋼矢板		控え杭		タイ ロッド 張力	矢板天端 水平変位
		曲げモ ーメン ト	発生応力	海側	陸側		
		kN・m/m	N/mm <sup>2</sup>	kN・m/m	kN・m/m	kN/m	cm
① 従来型 非線形反復 計算法	残留値	1556	407	718	883	450	-42
	時間最大値	1797	470	922	1091	568	-47
② 改良型 非線形反復 計算法で 対称接線 剛性行列	残留値	1129	296	523	614	370	-33
	時間最大値	1246	326	826	872	488	-37
③ 改良型 非線形反復 計算法で 非対称接線 剛性行列	残留値	1126	295	527	627	362	-33
	時間最大値	1239	324	840	916	482	-39

## 2-4-2 簡易大変形解析<sup>1)</sup>

### (1) 目的

FLIP プログラムは、微小歪理論を前提としているので、歪が小さく、かつ、微小変位、微小回転の現象を模擬するのが正当な使用法である。しかし、実際には、誤差を承知で、かなりの大変形現象までシミュレーションすることも多く、大変形解析機能の導入が望まれていた。ただ、大変形解析機能の定式化には、なお、時間を要するとの判断から、以下に示す簡易的な大変形解析機能を FLIP に導入した。

### (2) 方法

FLIP の地震応答解析時の運動方程式は、次式に示す通りである。

$$\textcircled{1} \quad \int_v B^T \sigma' dv + \hat{A} U_r + C \dot{U}_r + M \ddot{U}_r = -\ddot{u}_g M I + \int_v B^T \sigma'_{st} dv \quad (2-4-85)$$

ここに、 $B$  は  $B$  マトリックス、 $\sigma'$  は有効応力、 $U_r$  は節点相対変位、 $C$  は減衰行列、 $M$  は質量行列、 $\ddot{u}_g$  は基盤における入力加速度、 $I$  は質量行列から加震方向成分を抜き出すための行列、 $\sigma'_{st}$  は初期自重解析結果である有効応力であり、また、 $\hat{A}$  は間隙水の体積剛性を表す行列で、次式で表される。

$$\textcircled{2} \quad \hat{A} = \int_v B^T \left( \frac{K_f}{n} m m^T \right) B dv \quad (2-4-86)$$

ここに、 $K_f$  は間隙水の体積剛性、 $n$  は間隙率、 $m$  は歪成分から体積成分を抽出するための行列を表す。

(2-4-85)式の右辺を見て分かる通り、地震応答解析の際の荷重項は、地震による慣性力項と重力の作用を表す初期応力荷重項である。地震の作用により構造物が変形すると、例えば、盛土の天端レベルが下がると、盛土直下の土に作用する応力は軽減されるはずである。それを表現するために、地震応答解析において、一定の時間ステップ間隔で、その時の変位を用いて、節点座標の位置を修正して初期自重解析をやり直し、その結果である要素応力が動的解析に反映されるよう、(2-4-85)式右辺第2項の初期応力荷重項を組み立て直すこととした。具体的には、以下の手順による。

①通常の初期自重解析を行う。

$$\textcircled{3} \quad \int_{V} B^T \sigma_{st}' dv = -gMI_v \quad (2-4-87)$$

ここに、 $\sigma_{st}'$ は初期自重解析結果である有効応力、 $g$ は重力加速度、 $I_v$ は質量行列から鉛直方向成分を抜き出すための行列である。

②地震応答解析を1時間ステップ、あるいは、適当な時間ステップ実行する。

$$\textcircled{4} \quad \int_{V} B^T \sigma' dv + \hat{A}U_r + C\dot{U}_r + M\ddot{U}_r = -\ddot{u}_g MI + \int_{V} B^T \sigma_{st}' dv \quad (2-4-88)$$

③上記②の結果である相対変位 $U_r$ を用いて、初期自重解析用の節点座標を更新する。

④更新された節点座標に基づき、自重解析を行う。

$$\textcircled{5} \quad \int_{V_{new}} B_{new}^T \sigma_{new}' dv = -gM_{new}I_v \quad (2-4-89)$$

ここに、 $V_{new}$ は節点座標の更新に伴う新しい積分領域、 $B_{new}$ と $M_{new}$ は、節点座標の更新に伴い変更されたBマトリックスと質量行列を表す。

⑤上記自重解析で得られた $\sigma_{new}'$ は、構造物の変形を反映した応力であり、これを動的解析の要素応力に反映させたい。一方、動的解析では、Bマトリックスや積分範囲の更新は行われないので、動的解析に引き渡す初期応力荷重ベクトルは、初期のBマトリックスと初期の積分範囲に基づき、次式で算定する。

$$\textcircled{6} \quad \int_{V} B^T \sigma_{new}' dv \quad (2-4-90)$$

⑥上記(2-4-90)式で算定した初期応力荷重ベクトルで(2-4-88)式の右辺第2項を更新する。このようにすることにより、 $\sigma_{new}'$ の値が、動的解析に反映される。また、②に戻り、地震応答解析を再開する。

### (3) プログラム改良と操作法

上記方針に基づき、プログラムを改良した。改良点は以下の通り。

#### ①Macro 命令としての CHGL (Change Initial Load) 命令の新設

これは、動的解析が1ステップあるいは数ステップ進むごとに、その時の相対変位をファイル(#80)に出力し、(2-4-89)式を解くための自重解析用のバッチファイルを起動してファイル(#80)を渡す。また、バッチファイルの終了を待って、自重解析で作成する(2-4-90)式の初期応力荷重ベクトルをファイル(#81)経由で受け取り、(2-4-88)式の右辺第2項を更新する。なお、自重解析用のバッチファイルは、多段階解析の自重解析を実行するものでもよい。

#### ②Macro 命令としての SBAT (Static Analysis Batch) 命令

これにより、CHGL 命令で起動する自重解析用バッチファイルのパス名を指定する。

#### ③メッシュデータとしての UPXY (Update X,Y Coordinates) 命令の新設

これは、起動された自重解析において、上記①で作成された相対変位が格納されたファイル(#80)を読み、自重解析のオリジナルの節点座標に相対変位を加算して、節点座標を移動させる機能を持つ。また、STRU 命令がある場合は、移動後の座標に基づいて、メッシュデータ(#31)が出力される。

#### ④Macro 命令としての ELMF (Element Force) 命令の新設

これは、起動された自重解析の最後に、算定された応力を用いて、(2-4-90)式により初期応力荷重ベクトルを計算し、これをファイル(#81)に出力する。なお、対応している要素タイプは以下の通り。

- マルチスプリング要素
- 線形平面要素
- 線形はり要素 (アイソパラメトリック要素のみ)
- 非線形はり要素 (アイソパラメトリック要素のみ)
- ジョイント要素
- 線形ばね要素
- 非線形ばね要素

なお、線形／非線形のばね要素については、Bマトリックスに相当するものが無いので、通常の手順で要素節点力を算定している。

上記のプログラム改良を踏まえて、簡易大変形解析を行うための流れを次図に示す。

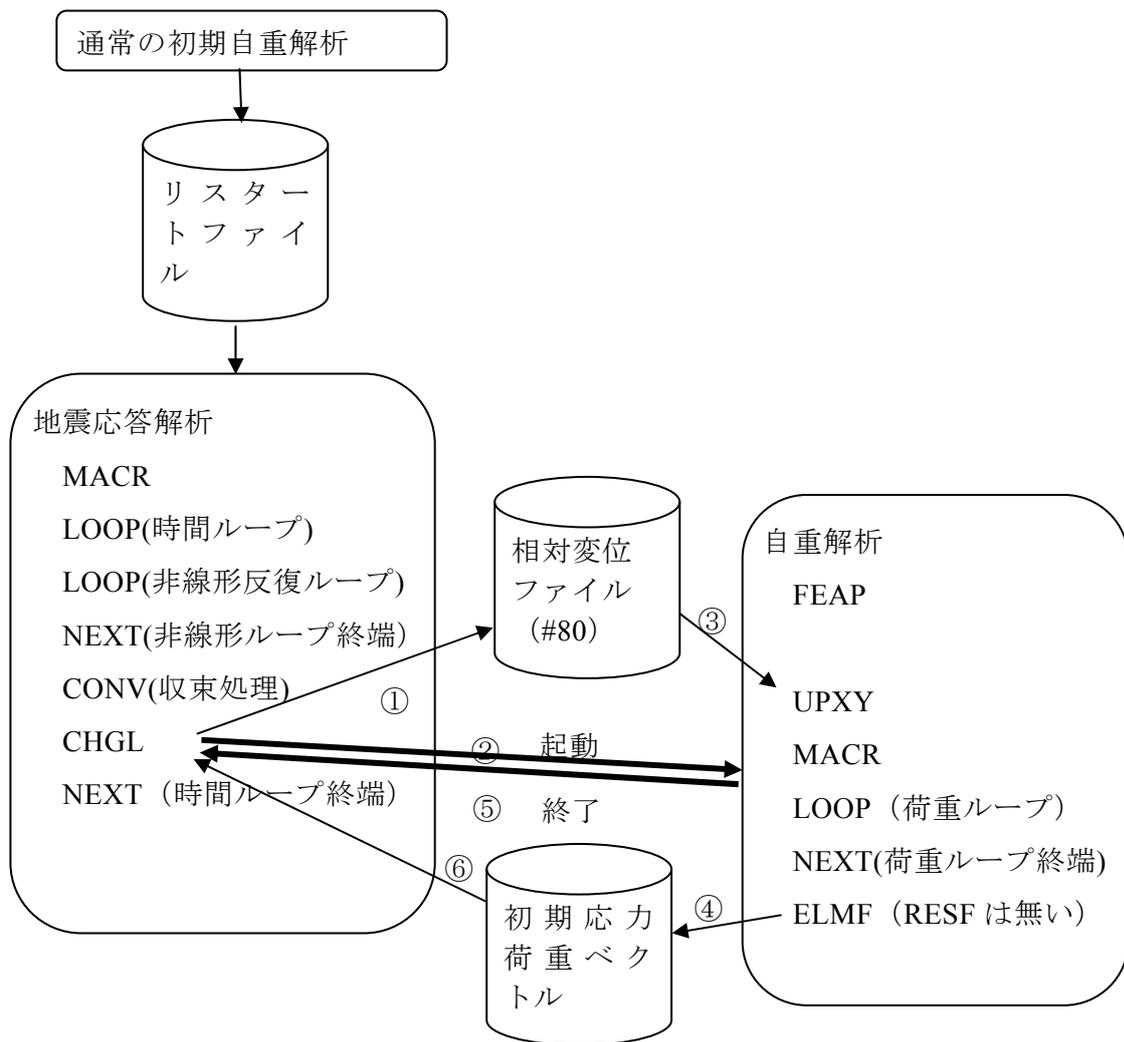


図 2-4-18 簡易大変形解析のフロー図

※通常の初期自重解析と自重解析は、ほぼ同じカード構成

#### (4) 簡易大変形解析の例題と解析結果

##### (a) 例題

例題として、建設省土木研究所において実施された、液状化する地盤上の盛土構造物に対する法先固化補強の効果を確認するための一連の動的遠心模型実験<sup>7)</sup>の中で、無対策の断面に対して大加速度および中加速度の地震波を入力するケースを取り上げた。対象断面を図 2-4-19に、入力地震動を図 2-4-20に示す。これらの図に示す寸法等は、すべて1 G場に換算したものであり、解析も1 G場において実施した。なお、計算時間短縮のために、地震動は、主要動部分11秒間のみを取り出して入力した。また、有限要素分割図を図 2-4-21に、解析地盤定数を表 2-4-7に示す。

解析ケースは、通常の方法によるものと、上述の「簡易大変形解析法」によるものの二通りとした。積分時間間隔はいずれも0.01秒とし、簡易大変形解析では、10時間ステップ(0.1秒)ごとに、その時点における変位に基づき節点座標を更新して、自重解析を行った。

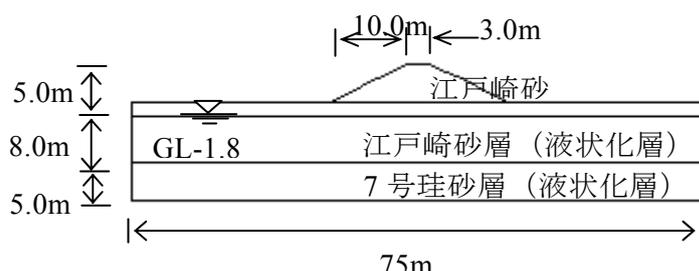


図 2-4-19 検討に用いた盛土の構造

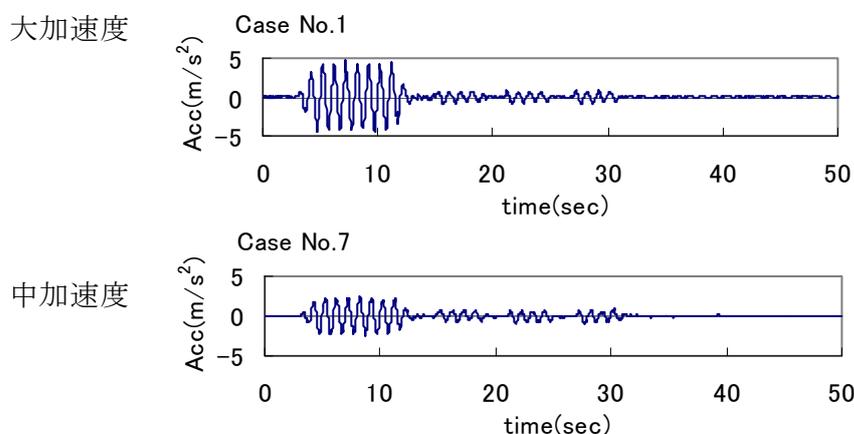


図 2-4-20 入力地震動

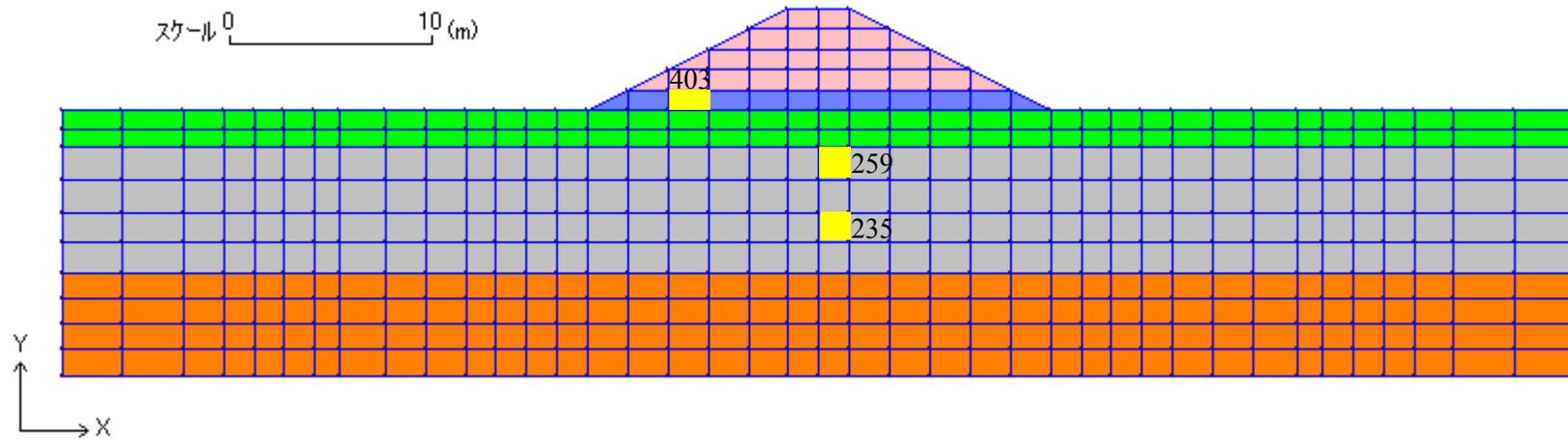


図 2-4-21 有限要素分割

表 2-4-7 解析地盤定数

	$\rho$	$\sigma_{ma}'$	Gma	Kma	n	Hmax	$\phi_f'$	$\phi_p'$	液状化パラメータ				
	密度	基準平均有効拘束圧	基準初期せん断剛性	基準体積弾性剛性	間隙率	最大減衰定数	せん断抵抗角	変相角					
	( $t/m^3$ )	(kPa)	(kPa)	(kPa)			(度)	(度)	S1	W1	P1	P2	C1
江戸崎砂(盛土)	1.70	98.0	84000	218000	0.49	0.26	34.0	—	—	—	—	—	—
江戸崎砂/地下水以浅	1.68	98.0	41000	107000	0.49	0.26	34.0	—	—	—	—	—	—
江戸崎砂/地下水以深	1.86	98.0	41000	107000	0.49	0.26	34.0	28.0	0.005	5.00	0.60	1.05	1.48
7号珪砂	1.98	98.0	86000	224000	0.40	0.24	48.0	28.0	0.005	5.10	0.65	0.90	1.82

## (b) 解析結果

盛土天端の残留沈下量の比較を表 2-4-8に示す。これによれば、従来法（微小変形解析）では、実験結果に比べてかなり大きな沈下量が生じていたが、簡易大変形解析では、沈下量はだいぶ抑えられて、実験結果に近づいた。

また、図 2-4-22には、大加速度の場合の実験結果である残留変形図（最終変形状況）を、図 2-4-23には、大加速度の場合の、残留変形図（主要動終了時）および過剰間隙水圧比（ $\equiv 1 - \sigma_m' / \sigma_{m0}'$ ）の残留値と時間最大値について、従来法（微小変形解析）と簡易大変形解析の比較を示す。同様に、中加速度の場合の実験結果である残留変形図（最終変形状況）を図 2-4-24に、図 2-4-25には、中加速度の場合の、残留変形図（主要動終了時）および過剰間隙水圧比（ $\equiv 1 - \sigma_m' / \sigma_{m0}'$ ）の残留値と時間最大値について、従来法（微小変形解析）と簡易大変形解析の比較を示す。

解析に要した時間の比較を表 2-4-9に示す。これによれば、簡易大変形解析は、従来法に比べて、3倍強の時間を必要とする。

表 2-4-8 盛土天端の残留沈下量の比較

	大加速度	中加速度
実験結果 <sup>7)</sup>	204cm	134cm
従来法(微小変形解析)	449cm	274cm
簡易大変形解析	266cm	171cm

※実験結果、解析結果ともに、主要動終了時の値。

表 2-4-9 解析時間の比較

	大加速度	中加速度
従来法(微小変形解析)	17分	15分
簡易大変形解析	56分	47分

※計算は、alpha チップ搭載の WS にて行った。単独処理では無いので、計算時間は参考。

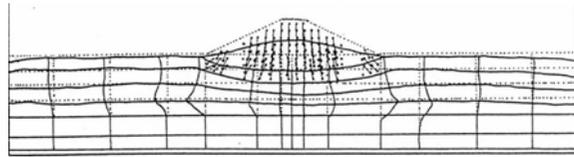


図 2-4-22 大加速度の場合の残留変形図：実験結果（最終変形状況）<sup>1)</sup>

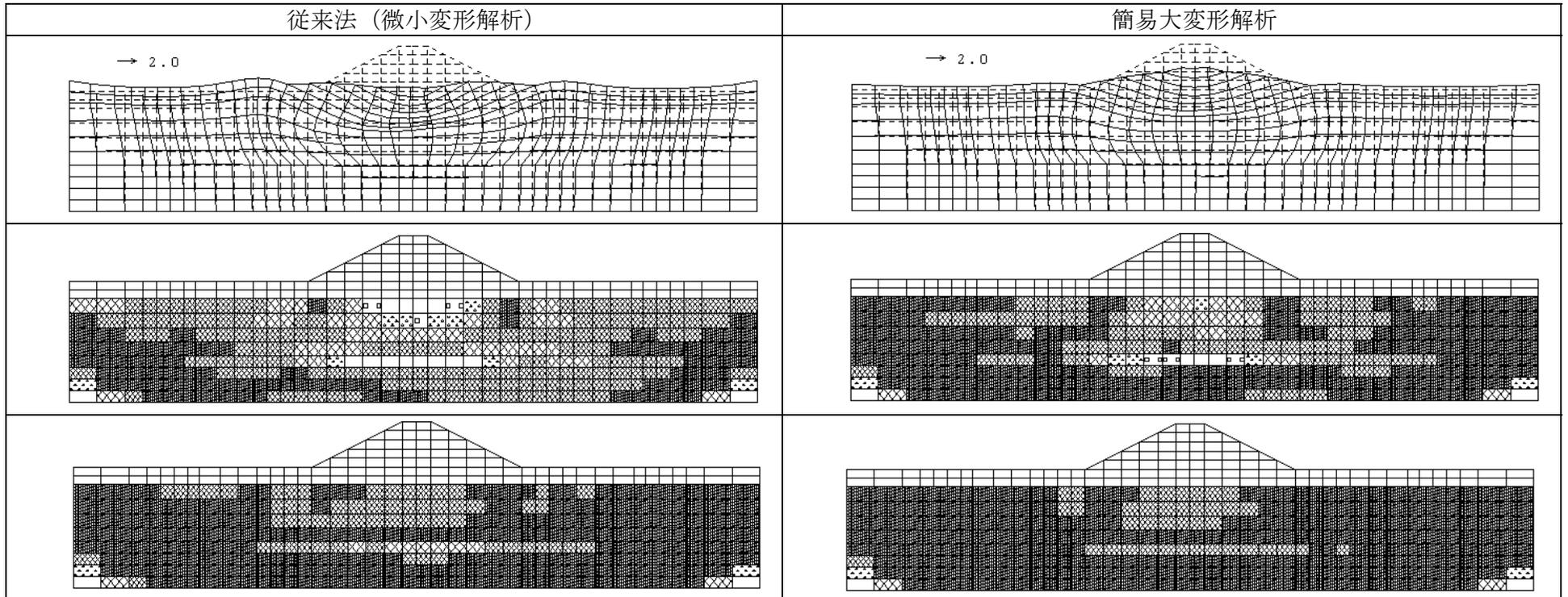
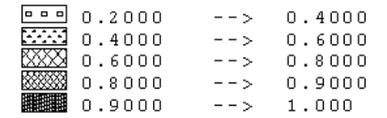


図 2-4-23 大加速度の場合の従来法と簡易大変形解析の比較：上から残留変形図、過剰間隙水圧比（ $\equiv 1 - \sigma'_m / \sigma_{m0}'$ ）の残留値と時間最大値

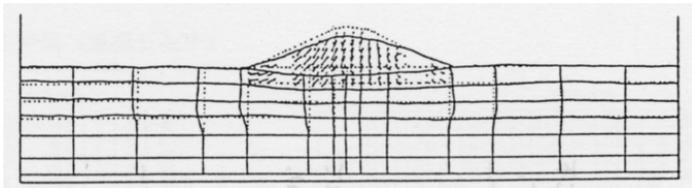


図 2-4-24 中加速度の場合の残留変形図：実験結果（最終変形状況）<sup>1)</sup>

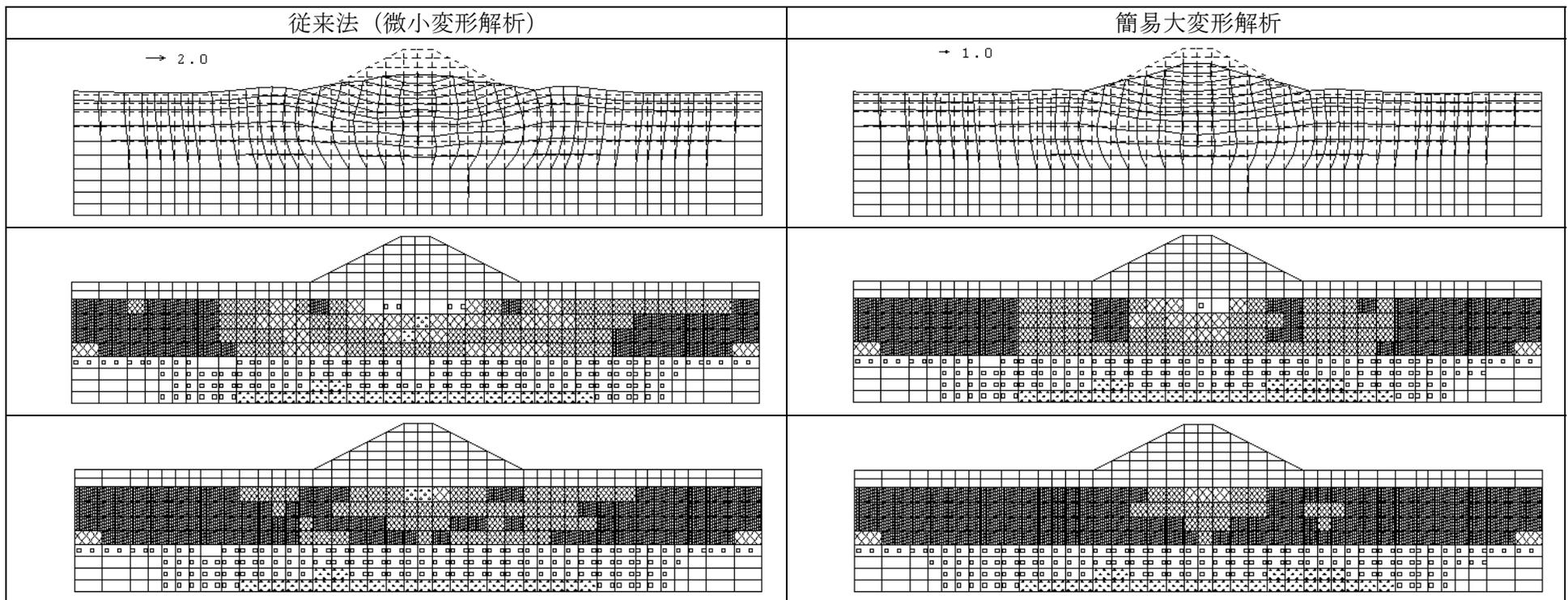
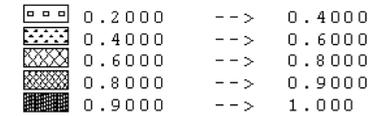


図 2-4-25 中加速度の場合の従来法と簡易大変形解析の比較：

上から残留変形図、過剰間隙水圧比 ( $\equiv 1 - \sigma'_m / \sigma'_{m0}$ ) の残留値と時間最大値（残留値は、主要動終了時のもの）

#### 2-4-1 項と 2-4-2 項の参考文献

- 1) 骨格曲線が変動する場合の平衡方程式の解法の検討およびその他プログラム改良について、第2回 第二期 FLIP 研究会 資料 2-2, 平成 14 年 7 月 4 日。(非公開文書)
- 2) Iai,S., Matsunaga,Y. and Kameoka,T.: Parameter Identification for a Cyclic Mobility Model, Rep. of the Port and Harbour Res. Inst. Vol.29, No.4, pp.57-83, 1990.
- 3) 森田年一, 井合進, Hanlong Liu, 一井康二, 佐藤幸博: 液状化による構造物被害予測プログラム FLIP において必要な各種パラメタ簡易設定法, 港湾技研資料, No.869, 1997.
- 4) Iai,S.,Morita,T.,Kameda,T.,Matsunaga,Y.,Abiko,K.: "Response of a deposited sand during 1993 Kushiro-Oki Earthquake", Soils and Foundations, Vol.35, No.1, pp.115-131, 1995.
- 5) Iai,S. and Kameoka,T.: Finite element analysis of earthquake induced damage to anchored sheet pile quay walls, Soils and Foundations, Vol.33, No.1, pp.71-91, 1993.
- 6) 井合進、龍田昌毅、小堤治、溜幸生、山本裕司、森浩章：地盤の初期応力条件が矢板式岸壁の地震時挙動に与える影響の解析的検討、土木学会第 26 回地震工学研究発表会講演論文集、 pp. 809-812, 2001.
- 7) 建設省土木研究所耐震技術研究センター動土質研究室：法先固化改良による盛土の耐震対策効果に関する動的遠心模型実験報告書, 土木研究所資料 第 3688 号, 2000.

### 2-4-3 SRI 法

非排水条件の解析では、土骨格と水が一体化した状態を前提とした解析を実施していることとなる。ここで、水の体積弾性係数は土骨格の体積弾性係数に比べ非常に大きいため、土骨格と水が一体化した状態の要素はほぼ等体積条件とみなすことができ、ポアソン比は、0.5 に近くなる。このとき、特に液状化によりせん断剛性が小さくなった条件では、**shear locking** 現象<sup>1)</sup>（本によっては **volume locking**<sup>2)</sup>）が生じて正しい解が得られない可能性がある。

ここで、問題となる現象はガウス積分の次数に依存して発生する。要素の剛性マトリックスを算定する際、一般の有限要素法ではガウス積分を用いて算定する。すなわち、要素内の積分を求める際、積分点における値に重みをかけて積分値を求める。

このとき、図 2-4-3-1 に示すような 4 節点要素であれば、中央に 1 点の積分点を設定する (1×1) 方法もしくはバランスよく 4 点の積分点を設定する (2×2) 方法が用いられる。

ここで、1×1 の積分点 (1 次の積分) を使用すると、要素中央の値に影響を及ぼさない変形に対しては、積分結果に反映されないことになる。すなわち、図中の破線で示したような変形は、数値解析上、無抵抗に生じてしまうこととなる。

もちろん、1 要素だけが自由に変形しようとしても通常は周囲の要素の変形を必要とするので、解析結果に表れることは少ない。しかし、図に示すような変形は、上下左右にうまい具合に平面を埋め尽くすように生じてしまうことができる。したがって、解析結果にメッシュの乱れとして反映されてしまう。なお、この時の変形モード (図 2-4-3-2) より、この変形モードをアワーグラス (砂時計) モードと呼ぶ。

そこで、2×2 の積分点 (2 次の積分) を使用するとよいのであれば、このときに発生する問題が、**shear locking** 現象である。すなわち、今度は、図 2-4-3-1 に示すように、点線の変形モードに対して、上側のガウス積分点ではあたかも体積が減少したような、下側のガウス積分点ではあたかも体積が増加したような評価を行うこととなる。これに対し、ポアソン比が 0.5 に近い等体積条件では、大きな抵抗が生じ、結果として変形を抑制することになる。こうして、数値解析的な問題によりせん断変形が拘束されることを、**shear locking** 現象とよぶ。変形量を過小評価することになるので非常に危険である。

そこで、**SRI** 法では、せん断変形に関する偏差成分を 1×1 の積分点 (1 次の積分) を、体積変化に関する平均成分には 4 点の積分点を設定する (2×2) 方法を用いる。詳しい理論的背景は参考文献 3) を参照されたい。なお、この結果として、解析で得られる変形量が変化する。図 2-4-3-3 は、ケーソン式岸壁の事例に対して、種々の積分法を適用した結果である。基本となる **SRI** 法 (1/2 : 平均成分 1 次 / 偏差成分 2 次) は、実測値の半分程度の変形量ではあるが、実測値が最大値であることを考慮すると、概ね整合した結果となっている。なお、1 次のガウス積分を使用した場合 (アワーグラスモードの発生を許容した

場合) もほぼ同様の変形量である. これに対し, ガウス積分の次数を増加させた場合 (2次, 3次) や次数の高い不適切な SRI 法 (2/3: 平均成分 2次/偏差成分 3次) は変形量が過小評価され, 特に沈下量ではほぼゼロに近い値となっている.

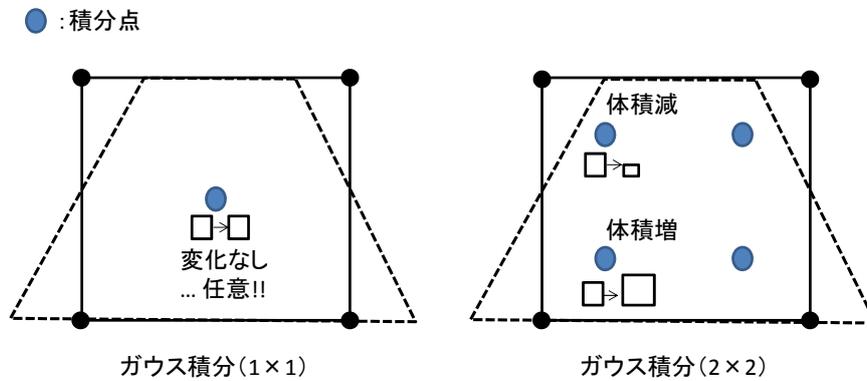


図 2-4-3-1 ガウス積分の次数と各種の問題点

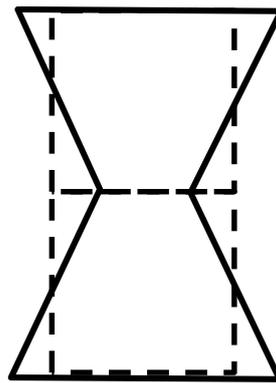


図 2-4-3-2 アワーグラスモード

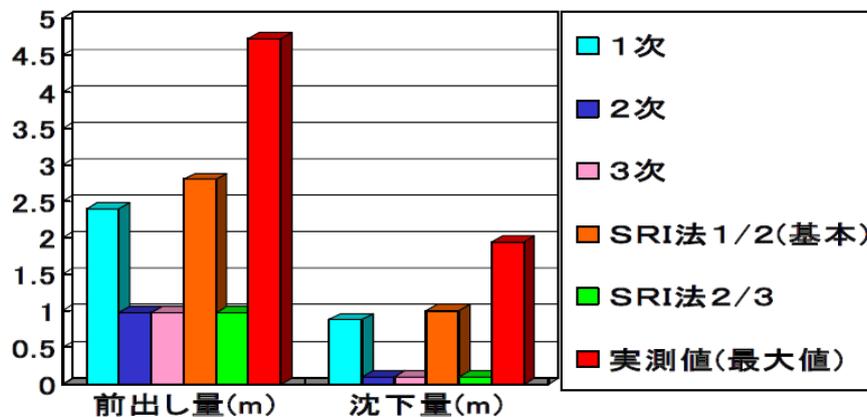


図 2-4-3-3 各種積分法による解析結果

なお、上記の議論では、SRI 法は非排水条件で間隙水の体積弾性係数が問題となる場合の手法である。しかし、実際には地下水位面以上の要素に対しても、SRI 法を適用すると解析の安定性が向上することが、盛土を対象とした事例解析により明らかとなっている。

ここで、盛土の事例解析は、1993 年北海道南西沖地震で被災した後志利別川の河川堤防の No.1 断面（河口から 4.44km）と無被災であった No.2 断面（河口から 5.00km）を用いて検討されている（平成 12 年度 FLIP 研究会・盛土作業部会）。これらの断面に対して、以下の項目について、パラメータ・スタディが実施されている。

- ① 盛土材の材料特性。特に、サクシオンを模擬するものとして粘着力 C の影響検討。
- ② 築堤解析。
- ③ 特定積分点への歪みの集中を緩和するモデルの検討  
（特に、地下水面以上の土要素に対する SRI 法の適用性検討）

この時の結論として、以下の事項が示されている。

「レーレー減衰行列の剛性比例係数  $\beta$  のわずかな変動に対して、盛土天端の沈下量等の応答値が大きく変動する現象は、堤体を含めた地下水面以上の土要素の要素積分法に SRI 法（偏差成分 2 次、平均成分 1 次）を採用することにより、解消された。これは、体積歪の評価が要素中央で行われることから、要素積分点単位の局所的な引っ張り状態に影響されることが無くなったためと考えられる。」

#### <2-4-3 の参考文献>

- 1) Molenkamp,F.,Kidger,D.J.,Smith,I.M.: Accuracy of Four-Node Standard Finite Element, Int.J. Num. Anal. Meth. Geomechanics, Vol.16, pp.323-333, 1992.
- 2) 吉田望：地盤の地震応答解析，鹿島出版会，2010.
- 3) Hughes T.J.R.: Generalization of Selective Integration Procedures to Anisotropic and Nonlinear Media, Int.J.Num.Meth.Eng., Vol.15, pp.1413-1418, 1980.

#### 2-4-4 時間積分法の感度解析について

時間積分法の選択が解析結果に及ぼす影響については、平成9年に釧路港の1次元鉛直アレー観測記録を対象とした解析で検討されている。

平成9年の検討においては、液状化を考慮する場合と考慮しない場合（液状化パラメータなしの場合）が考慮されている。また、時間積分手法として次の3種類が対象であった。

Wilson  $\theta$  法 ( $\theta = 1.4$ )

Newmark 法 ( $\alpha = 0.25, \delta = 0.5$ )

Newmark 法 ( $\alpha = 0.3025, \delta = 0.6$ )

これに対して、時間間隔  $\Delta t$  は、次の4通りに変えて解析が実施された。

0.02 秒, 0.01 秒, 0.005 秒, 0.0025 秒

なお、0.02 秒はサンプリング間隔が粗く、情報が欠落して、他の時間間隔のものとは応答の傾向が異なる結果となった。したがって、以降の考察から除外されている。

解析結果を要約すると

- ①液状化を考慮するケースでは、最大値応答分布は、最大加速度を除いて概ね同等である。
- ②液状化を考慮する9ケースの加速度時刻歴のスパイク状のピークは、 $\Delta t$  が小さいほど多発し振幅も大きい。地表面の加速度時刻歴のスパイク状のピークの高さは、Newmark 法 ( $\alpha = 0.25, \delta = 0.5$ ) が一番高い。Wilson  $\theta$  法 ( $\theta = 1.4$ )、および Newmark 法 ( $\alpha = 0.3025, \delta = 0.6$ ) は優劣が付けがたいが、 $\Delta t = 0.01$  秒では明らかに後者のピークの高さが抑えられている。スパイク状のピークは過剰間隙水圧が上昇を開始した時刻にあたる13秒付近から出現し始め、過剰間隙水圧比が0.6に達する17秒付近で最も激しくなる。(たとえば図2-4-4-1)
- ③  $\Delta t = 0.0025$  秒の場合は、有効応力経路図の下側の破壊線に沿って多くのループ状の応力経路が描かれる要素が生じ、また、これに対応して応力-歪履歴曲線では、第3象限の除荷曲線が乱れ、全般的に収束性が悪くなっている(図2-4-4-2)。
- ④非液状化解析の場合は、各深度の水平加速度時刻歴および水平変位時刻歴はまったく同等で、また、スパイク状のピークも見あたらない。
- ⑤時間積分法とは別に、要素積分法を変化させた検討を実施したところ、SRI法(1/2:平均成分1次/偏差成分2次)を用いた際に、加速度時刻歴のスパイク上のピークの発生が抑制される結果となった。

E-1-4  $\Delta t=0.0025$

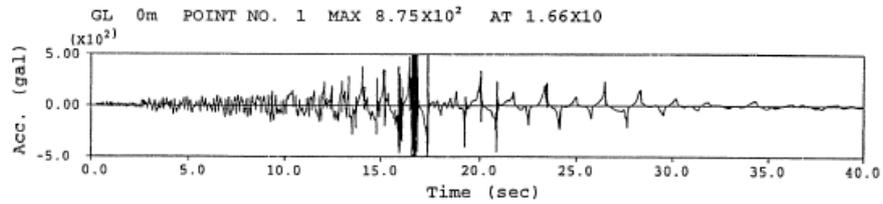


図 2-4-4-1 時刻歴の例

E-1-4  $\Delta t=0.0025$

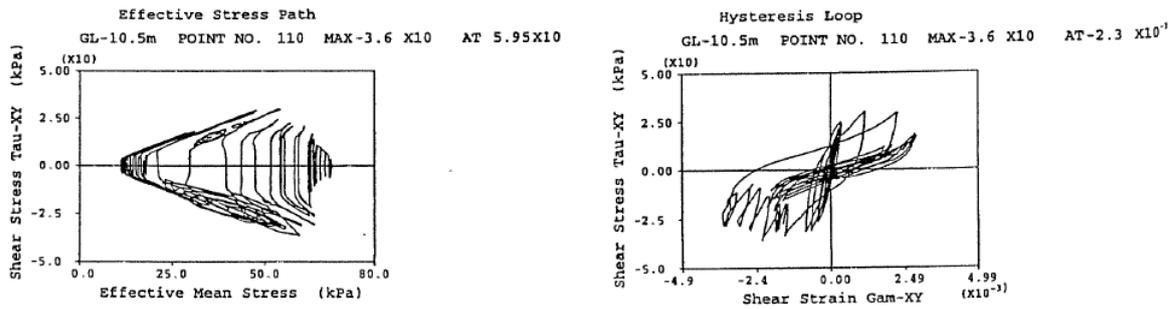


図 2-4-4-2 収束性が低下したケースにおける応力経路と応力—ひずみ関係

以上から、次の考察がなされている。

a) 前述のように、過剰間隙水圧上昇開始後に生じる加速度波形のスパイク状のピークは、主に液状化により有効応力が変動して骨格曲線を乗り移る際に発生する不平衡力を解消するために生じる。使用した時間積分手法では次ステップでの加速度は変位増分に  $1/(\Delta t)^2$  に比例する項を乗じて評価するので、不平衡力状態を解消するために大きな変位増分が発生するとすれば、大きな加速度が生じることになる。

b) 線形計算では、時間積分に起因する人工減衰が、およそ次の条件の時に生じる。ここで、 $T$  は対象としている現象の波形の周期である。

Wilson  $\theta$  法 ( $\theta = 1.4$ ) .....  $\Delta t / T > 0.1$

Newmark 法 ( $\alpha = 0.25, \delta = 0.5$ ) ..... 人工減衰は無い

Newmark 法 ( $\alpha = 0.3025, \delta = 0.6$ ) .....  $\Delta t / T > 0.03$

すなわち、表 2-4-4-1 に示す振動数以上の現象に対しては人工減衰が発揮される。

表 2-4-4-1 人工減衰が発揮される振動数の下限

$\Delta t =$	0.01秒	0.005秒	0.0025秒
Wilson $\theta$ 法 ( $\theta = 1.4$ )	10Hz	20Hz	40Hz
Newmark法 ( $\alpha = 0.3025, \delta = 0.6$ )	3Hz	6Hz	12Hz

この表を見ると、Wilson  $\theta$  法 ( $\theta = 1.4$ ) では 10Hz 以下の現象に対しては人工減衰は働かず、また、Newmark 法 ( $\alpha = 0.25, \delta = 0.5$ ) では全くは働かないので、変位の応答（観測されるひずみレベル）はほとんど同じになる。また、Newmark 法 ( $\alpha = 0.3025, \delta = 0.6$ ) では、 $\Delta t$  が 0.01 秒では変位に対しても人工減衰の影響が出てよさそうであり、実際、このケースに限り地表面の最大水平変位が他と比べて若干小さめである。

c) 非液状化解析では、間隙水圧上昇中に生じる不平衡力の問題があまり無いので、 $\Delta t$  を小さくしてもスパイク状のピークはほとんど出現しない。

また、以上の考察から下記のような結論が得られている。

- 1) どの積分手法でも 0.01 秒以下のどの時間間隔でも概ね同等である。ただ、Newmark 法 ( $\alpha = 0.3025, \delta = 0.6$ ) では、 $\Delta t$  が 0.01 秒の時に人工減衰の影響が若干ある。
- 2) 液状化解析の場合にスパイク状のピークが発生するが、それは収束方法に起因するものであり物理的な意味は無い。変位応答等を変えずにスパイク状のピークのみを抑える方法が必要であり、そのためには以下の方法がある。
  - ・ 時間間隔を細かくし過ぎてスパイク状ピークの発生を誘発しない。
  - ・ 高振動数に選択的に効く人工減衰を活用する (Wilson  $\theta$  法 ( $\theta = 1.4$ ) が適当)
  - ・ S R I 法を用いる。

なお、平成 9 年当時の検討結果であるため、最新のバージョンでは結果が異なる可能性はあることには留意されたい。特に、改良型非線形反復法 (2-4-1 項参照) では、不平衡力の問題が改善されているので、当時の検討に比べ、時間積分法の選択で生じる影響が小さい可能性がある。

#### 2-4-5 収束判定の影響の感度解析について

収束判定の基準が解析結果に及ぼす影響については、平成9年に釧路港の1次元鉛直アレー観測記録を対象とした解析で検討されている。

検討では、地震応答解析の際の非線形反復ループの収束判定誤差(不平衡力の低減率)を0.01~0.0001に変化させて解析が実施された。なお、非線形反復ループの最大繰り返し回数は、打ち切りの影響をなくすためにすべて1000回とした。また、時間積分手法は次の2通りである。

Wilson  $\theta$  法 ( $\theta = 1.4$ )

Newmark 法 ( $\alpha = 0.3025, \delta = 0.6$ )

解析結果では、どちらの時間積分手法を用いても、最大水平加速度分布にわずかな違いが見られるが、その他の計算結果はほとんど同じであり、明瞭な差が表れなかった。

これは、恐らくFLIPが増分法でないので、多少の不平衡力の持ち越しはあまり問題にならず、Wilson  $\theta$  法のように本質的に不平衡力が発生する手法(平衡条件を課す時刻が $1.4\Delta t$ 後の時刻であって、当該時刻の平衡条件が課せられていない手法)でもNewmark法と同程度の収束性が確保されたからであると考察されている。

最終的に、非線形反復ループの収束判定誤差(不平衡力の低減率)は0.01で十分であると結論付けられている。

なお、平成9年当時の検討結果であるため、最新のバージョンでは結果が異なる可能性はあることには留意されたい。また、1次元解析における地震応答に着目した検討結果であり、2次元解析における変形量での比較ではないことにも留意されたい。

### 3. 解析における条件設定

#### 3-1 レーレー減衰

FLIP（マルチスプリング要素）で考慮する減衰は、要素の履歴によって生じる履歴減衰である。本来であれば、この履歴減衰の考慮により、減衰は十分に考慮できているはずである。

しかし、実際上は、数値解析の安定性の確保を目的として、微小なレーレー（Rayleigh）減衰が導入される。この微小なレーレー減衰は、① 数値計算の安定化（特に、液状化解析時）、② マルチスプリング要素（特に、液状化考慮時）の粘性減衰の代用、③ 線形要素の減衰の代用、として導入されるものである。①と②は密接にリンクしている。すなわち、実際には履歴減衰に加えて速度に比例した抵抗力としての粘性減衰が材料に存在するはずであるが、解析上考慮できない（していない）ので、解析が不安定となる。そこで、解析を安定させるために①を導入すると、②が考慮できていることになる、という定性的なリンクである。しかし、実際問題として、材料の粘性減衰を適切に評価することは難しく、定量的なリンクは必ずしもできていない。

レーレー減衰は次式で表される。

$$\alpha M + \beta K$$

ここで、M：質量行列、K：剛性行列である（一般の使用では、初期接線剛性行列  $K_T^0$ ）。ただし、教科書によっては、 $\alpha$  と  $\beta$  を逆に定義している教科書もあるので注意されたい（ $\alpha K + \beta M$ となっている）。

なお、FLIP では、 $\alpha = 0$ 、 $\beta > 0$ （ $\beta$ ：剛性比例係数）を仮定し、高振動数に対して特に減衰が寄与するように設定する。

##### 3-1-1 $\beta$ の設定法

レーレー減衰パラメータ  $\beta$  の設定法については、平成 9 年に FLIP 研究会で検討されている。まず、既往の FLIP の解析事例について、設定値と地盤条件等が調査された。

具体的には、既往の FLIP による岸壁等の解析事例 23 件に対して、そこでのレーレー減衰パラメータ  $\beta$  の設定値や 1 次元的な地盤特性等が調査された。その結果は、次の点に着目して、整理された。

- ・  $\beta$  の範囲
- ・ 自由地盤部の固有周期と  $\beta$  の関係
- ・  $\beta$  設定に用いた地震動の特性と  $\beta$  の関係

調査結果として、以下の情報が得られた。

①  $\beta$  の範囲は、0.0005～0.01 である。

② 地盤の 1 次固有周期  $T_G$  が小さいと、 $\beta$  の値も小さい。また、 $T_G$  が大きいと  $\beta$  の値も大きい（図 3-1-1-1 参照）。例えば、 $T_G$  が 1 秒以下であると、 $\beta$  の値は、概ね、0.002 以下



ただし、現実的には、模型震動実験の場合には相似則の影響もある。1G 場あるいは遠心場の両方において同様の結果が得られている場合には、相応の定量的評価が可能であると思われるが、注意が必要である。

さらに、耐震性能照査を目的とする解析実務においては、以上の標準的な場合のいずれにも該当しない場合も多い。これらの場合には、前節までに検討してきたように、自由地盤部の土層構造を用いて  $\beta$  を算定する方法を採用することが、現実的と思われる。この方法としては、以下の3つが考えられる。

#### ①地盤応答に影響を与えなくなる臨界点に基づく方法

F L I Pにより自由地盤部の地震応答解析を行う。この際、 $\beta$  の値を徐々に小さくしていき、それ以上  $\beta$  を小さくしても最大地震応答の地中分布が変わらなくなる  $\beta$  の臨界点を求め、その  $\beta$  値を採用する。地盤の地震応答としては、加速度、相対速度、相対変位などがあるが、対象とする構造物の設計において、例えば地盤相対変位が支配的な影響を与えると考えられる場合には、 $\beta$  の決定においても、相対変位の地中分布に基づくことが適当である。

#### ②自由地盤部の固有周期と減衰定数に基づく方法

自由地盤部の土層構造を用いて、その1次固有周期  $T_G$  を求め、それと小さな減衰定数  $h$  から、 $\beta = h T_G / \pi$  により算定する。

なお、参考までに記すと、第  $i$  次モードの運動方程式が次式であるとする

$$\ddot{x}_i + 2\omega_i h_i \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = r_i$$

このとき、レーレー減衰  $\beta$  は次式の関係となる。

$$2\omega_i h_i = \beta \omega_i^2$$

ここで、目安とする小さな減衰定数の値としては、1%が目安として提案されていたこともある。しかし、現在では意見が分かれており、明確な目安はない。①で求まる、変位応用に影響を与えないような値は 0.5%程度に相当する場合が多いとの報告もある。時間反復法の改良前には、ある程度大きな値を使わざるを得ず、1%程度が経験的に使われていた経緯があると思われるが、現在の時間反復法では解析の安定性も高く、不必要に大きな減衰定数に相当する値は使わないほうがいいかもしれない。

#### ③等価線形解析結果との比較による方法

S H A K Eにより自由地盤部の地震応答解析を行う。使用する  $G/G_0 \sim \gamma$  曲線および  $h \sim \gamma$  曲線は、F L I Pの構成則と整合するように、双曲線モデルに基づく曲線を使用する。また、F L I Pでも、S H A K Eの条件と合わせるために、過剰間隙水圧の発生を考慮しない設定にして自由地盤部の地震応答解析を実施する。この際、 $\beta$  の値を様々に変化させ

て、SHAKEによる最大地震応答の地中分布と最も一致する分布を与える $\beta$ を採用する。ここで、参照する地震応答の種類は上記①と同様の基準で決める。なお、SHAKEの歪依存曲線として実験結果に基づく曲線を使用することも考えられるが、大歪レベルにおける信頼性が無いのと、それに基づいたSHAKEの最大応答値分布とFLIPの分布を一致させるのが困難であるので、ここでは取り上げない。

なお、RF3岸壁の被災断面に対して、上記①～③の各方法を適用した結果として、表3-1-1-1に示すような $\beta$ の値が得られている。この表によれば、③のSHAKEと比較する方法による陸側自由地盤部を対象とする計算で得られた $\beta$ 値がやや大きめであるのを除けば、どの方法でも同様の値である。また、この表には、釧路港1次元地盤モデルに対してこれらの方法を適用して求めた $\beta$ の値も示されている。

ただし、これらの検討は平成10年時点でのFLIPを用いた検討であり、最新のFLIPのバージョンでは異なる結果が得られる可能性もある。

表 3-1-1-1 レーレー減衰の算定結果の比較

方法		RF3岸壁被災断面		釧路港1次元地盤モデル
		陸側自由地盤部	海側自由地盤部	
事例解析に用いた $\beta$		0.002		0.0005
①FLIP単独	液状化を考慮	0.001～0.002	——	0.0005～0.001
	液状化考慮せず	0.002	0.001～0.0005	0.001
②地盤固有周期 (h=1%の場合)		0.002	<未検討>	0.003
③SHAKEと比較 ( $\alpha_0=1.0$ の場合)		0.005	0.0005	<未検討>*2

※1 上記の①と③の $\beta$ は、最大相対変位の地中分布を用いて判定したもの。

※2 歪依存曲線に標準曲線（「埋立地の液状化対策ハンドブック」記載の曲線）を用い、 $\alpha_0=0.65$ とした検討では、 $\beta$ は決定不能であった。

また、種々の算定方針が林立することを避けるため、その後、解析精度向上WGでは、①の方法を推奨している。すなわち、繰り返しになるが、自由地盤部などの1次元解析モデルを使用して、非液状化非線形解析を行い、 $\beta$ をそれ以上減じても、最大応答変位の地中分布が変化しなくなるような $\beta$ の臨界値を採用する方法である。つまり、変形量が低めに見積もられる危険性のない範囲で、解析の安定性を担保できる最大の値を採用する方法である。

### 3-1-2 個別減衰，とくにジョイント要素に及ぼす影響

FLIP 研究会では，1995 兵庫県南部地震の際に被災したケーソン式の神戸港 RF3 岸壁を対象に FLIP の各種パラメータの感度解析を実施している（実施時期：平成 10 年 3 月～12 月）．その際の成果の一つとして，ケーソンと捨石の間の滑り・剥離を模擬するために使用するジョイント要素が，その初期剛性  $K_s$  に基づいて設定されたレーレー減衰行列の影響で滑り難くなっていること，また，ジョイント要素の初期剛性  $K_n \cdot K_s$  を変えるとケーソンの残留変位量が大きく変わることを見出した点がある．

すなわち，上述のように，レーレー減衰は次式で表される．

$$\alpha M + \beta K$$

ここで， $M$ ：質量行列， $K$ ：剛性行列である（一般の使用では，初期接線剛性行列  $K_T^0$ ）であるが，ジョイント要素では，非常に大きな剛性を有しているため，微小な減衰パラメータ  $\beta$  であっても，結果として大きな減衰力が発揮される結果となる．

さらに詳しく述べると，ケーソン式岸壁のケーソンと基礎捨石・裏込石の間や，矢板式岸壁の矢板と土の間には，その間の滑り挙動を表現するためにジョイント要素（図 3-1-2-1）を用いる場合がある．ジョイント要素は，原則として，垂直方向の引張力は負担しない．圧縮側では垂直方向接線剛性（ $K_n$ ）に応じた力を負担する．また，せん断方向（滑り方向）は，せん断応力がせん断強度に達するまではせん断方向接線剛性（ $K_s$ ）に応じた力を負担する．せん断強度（ $\tau_f$ ）は，剥離状態で無い限り，垂直方向の有効拘束圧  $\sigma_n'$  に基づき次式で計算する．剥離状態ではせん断強度は 0 とする．

$$\tau_f = C_f + \sigma_n' \tan \phi_f \quad (3-1-2-1)$$

$K_n$  や  $K_s$  の値は物理的な根拠に基づいて設定するのではなく，周囲の土の変形よりも大きな変形がジョイント要素の線形部分で生じることのないよう，比較的大きめの値を指定することが通例であり，これらは人為的な値である．

1995 兵庫県南部地震の際に被災した神戸港のケーソン式岸壁（水深-8.5m，設計震度 0.15，床堀置換改良）の被災事例解析用のモデル断面においては，ケーソン底面と基礎捨石の間，および，ケーソン背面と裏込石の間に，それぞれ，滑り・剥離を表現するためのジョイント要素を設定した．このモデル断面を利用して，ケーソン底面のジョイント要素の  $K_s$  と  $K_n$  を 様々に変えた場合のケーソンの残留変位が計算されている．計算結果を図 3-1-2-2 に示す．また，同様に，ケーソン背面のジョイント要素の  $K_s$  と  $K_n$  を 様々に変えた場合のケーソンの残留変位を図 3-1-2-3 に示す．これらの図によれば，ケーソンの残留変位はジョイント要素の  $K_s$  と  $K_n$  の値に大きく影響される．

つまり，上述の  $K_s$  や  $K_n$  の値にケーソンの残留変位が影響を受ける現象は，ジョイント要素の挙動がレーレー減衰（ $\beta K_s$  や  $\beta K_n$ ）に支配された結果である．

$K_s$  や  $K_n$  は前述のように人為的に与えるものであるため、これによりケーソンなどの応答値が影響されるのは適当でない。よって、レーレー減衰をジョイント要素の初期剛性に比例させて定めるのは適当ではない。

以上のような場合を念頭に、要素ごとにレーレー減衰パラメータを設定できる機能が導入されている。すなわち、ジョイント要素のレーレー減衰を0にするという設定が可能となっている。

ただし、ジョイント要素に減衰を与えない場合、そのようにするとジョイント要素の収束性が悪化して、加速度応答時刻歴にスパイク状のピークが多発する。この対策として、時間積分間隔  $\Delta t$  を小さく取ることが必要であったが、そうすると、従来型の非線形反復計算法では、別の理由から応答加速度時刻歴にスパイク状のピークが多発ようになる。改良型非線形反復法を適用した場合は、時間積分間隔  $\Delta t$  を十分に小さくすることで、スパイク上のピークを防止しつつ、ジョイント要素の機能を十分に評価することが可能であるが、計算時間が増加するという難点もある。



図 3-1-2-1 ジョイント要素の応力-変位差の関係

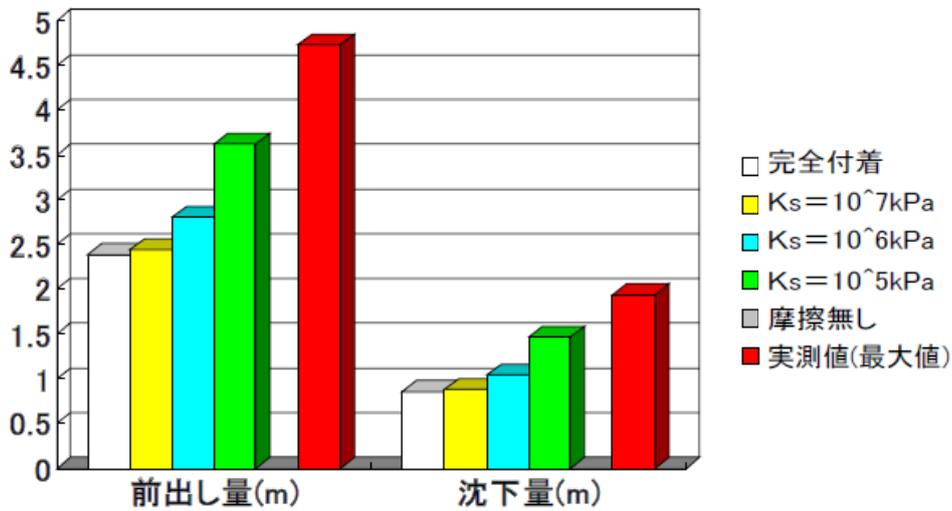


図 3-1-2-2 神戸港ケーソン式岸壁 ケーソン底面のジョイント要素の  $K_s$  と  $K_n$  の値 (同じ値とした) に応じたケーソン残留変位の比較 (※ケーソン背後のジョイント要素の  $K_s$  と  $K_n$  は一定値)

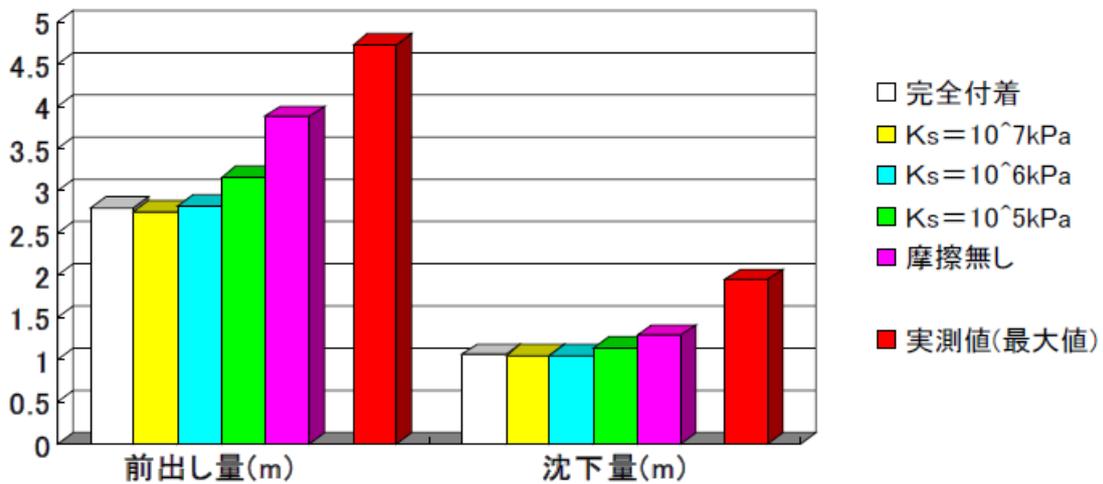


図 3-1-2-3 神戸港ケーソン式岸壁 ケーソン背面のジョイント要素の  $K_s$  と  $K_n$  の値 (同じ値とした) に応じたケーソン残留変位の比較 (※ケーソン底面のジョイント要素の  $K_s$  と  $K_n$  は一定値)

## 3-2 境界条件

### 3-2-1 境界条件の設定

#### (1) 解析領域

港湾構造物を対象とした有効応力解析では、半無限に連続する地盤のうち検討対象である構造物とその周辺地盤を切り取った領域を解析領域とする場合が多い。図 3-2-1 は一般的な解析モデルの概略であるが、検討対象である構造物とその周辺地盤を含む不規則領域は左右両側と底面を直線で切り取ったような形状となる。この不規則領域だけでは境界条件として十分ではなく、地震波が入射してくる底面境界、不規則領域で発生した乱れが反射しないよう側方境界が必要である。

境界条件として完全なものではなく、着目する構造物の挙動に境界条件の影響が小さくなるよう、不規則領域を十分広く設けることが基本である。例えば、鉛直方向には工学的基盤面までを不規則領域とし、底面に粘性境界を設定する。水平方向には側方境界の挙動が構造物に及ぼす影響がほぼなくなるまで十分広い範囲を不規則領域とし、この左右側面に側方境界を設定する。側方境界として、無限に広がる仮想的な水平成層構造を表す自由地盤部と不規則領域を粘性境界および反力境界で結合することが一般的である。

1995 年兵庫県南部地震においては岸壁法線から背後 100m 位の範囲まで側方流動の影響が見られたため、岸壁陸側の水平方向の境界位置は岸壁法線から 100m 以上離れた位置に設定することが望ましい<sup>1)</sup>。

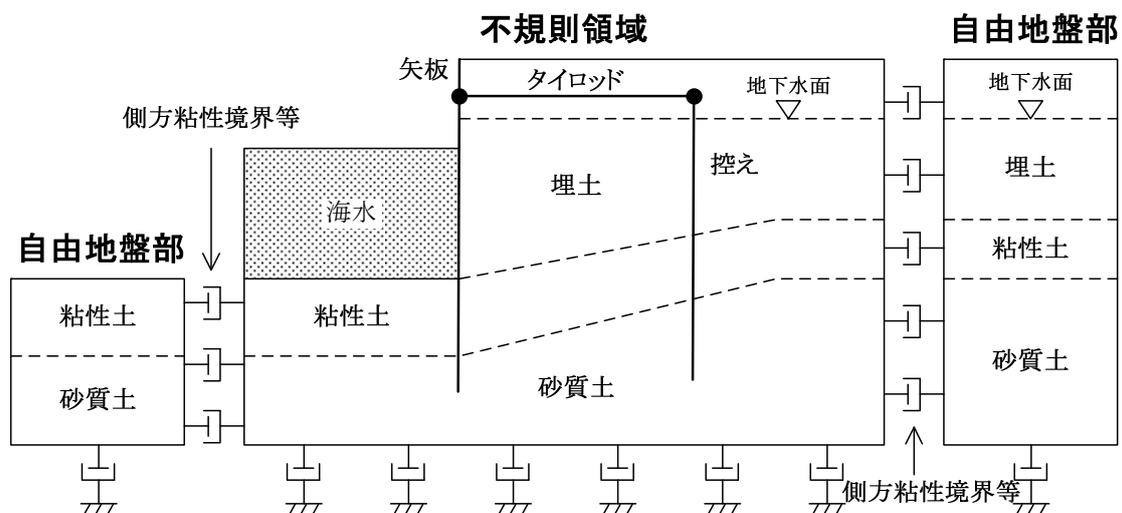


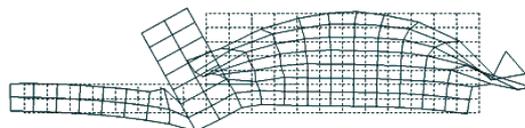
図 3-2-1 一般的な解析モデル

## (2) 側方境界

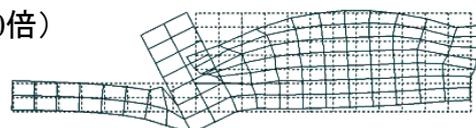
側方境界は、不規則領域で発生した乱れが境界位置で反射して不規則領域に戻ってこないよう設けるもので、基本的には、粘性境界 (Lysmer 境界<sup>2)</sup>)、反力境界<sup>3)</sup>および自由地盤部により構成される。自由地盤部は不規則領域より十分に離れ、不規則領域の挙動の影響を受けない水平成層地盤を表すもので、粘性境界では不規則領域と自由地盤部の速度差に応じた力が働く。従って、地盤の液状化による流動現象のようなゆっくりとした動きに対しては抵抗する力が働かないので、不規則領域の土の変形が側方境界より自由地盤部へ大きく発生する場合がある。図 3-2-2は簡易モデルで側方境界の違いによる残留変形の違いを示したもので、粘性境界を用いた場合は不規則領域の土が側方境界の外側へ流れ出るように変形している (図 3-2-2①))。この問題点を解決するために、自由地盤部の循環境界条件に応じて作用する反力を不規則領域の境界に作用させる反力境界が有効である。この方法では左右の自由地盤部が異なり、かつ底面が粘性境界の場合は、不規則領域が全体的に一方向に移動したり、扇状に曲がるように変形したりすることがある ((図 3-2-2③))。別の対処法として、反力境界を無効とし粘性境界の  $V_p$  を 100 倍程度に上げて、側方境界上の水平変位を自由地盤部と一致させる方法 (図 3-2-2②)、底面境界上の水平自由度を MPC 指定して力の分散を図る方法が多く用いられている (図 3-2-2④)。

このような境界条件によって発生する挙動が、着目する構造物の挙動に対する影響が小さくなるよう、構造物と境界位置が十分な距離になるよう不規則領域を設定することが基本である。

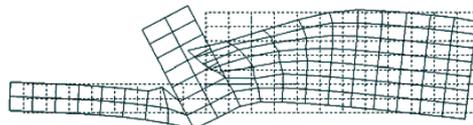
### ①側方粘性境界



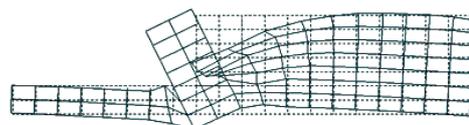
### ②側方粘性境界 ( $V_p=100$ 倍)



### ③側方粘性／反力境界



### ④側方粘性／反力境界 底面境界上の全節点の 水平自由度をMPC指定



(初期自重解析で 10G 载荷、変形は 10 倍スケール)

図 3-2-2 側方境界の違いによる残留変形の違い

### (3) 底面境界

底面境界の設定は、解析に用いる入力地震動の種別によって異なる。一般にシナリオ地震動は、解放基盤面（表層のない工学的基盤面）への入射波（2E波）として設定されることから、入力地震動としてシナリオ地震動を用いる場合、底面境界として解析領域（不規則領域および自由地盤部）底面には粘性境界（Joyner 境界<sup>4)</sup>）を設ける。一方、鉛直アレーなど地中で観測された地震記録を入力地震動として解析領域底面に作用させる場合、入力波と反射波の和である複合波(E+F)を入力することになるため、解析領域底面には粘性境界を設けない。これは、解析領域底面以深の剛性が無限大である剛基盤に相当する。

底面粘性境界は入射するP波とS波に対して有効であるが、前述のように粘性境界はゆっくりとした動きに対して変位が発生するため、底面粘性境界において変形が残留し、不規則領域全体が移動するような変形が生じることがある。それゆえ、変形量を評価する際には、不規則領域底面（底面粘性境界の上側節点）との相対変位を用いる必要がある。

### (4) 海水領域の境界条件

海水による動水圧を考慮する場合、地盤変位に関する境界条件に加えて、海水領域について境界条件の設定が必要である。図3-2-3は海水領域の境界条件の概略である。海水表面では水圧が0 ( $Q=0$ )、モデル側面では海水の流出入を考慮しない ( $\partial Q/\partial n=0$ ) 境界条件の設定が必要である。また、海水と地盤や構造物が接する構造物連成面では、流体-連成面境界要素を設けることで、この境界での動水勾配から地盤や構造物に作用する節点力へ変換することができる。

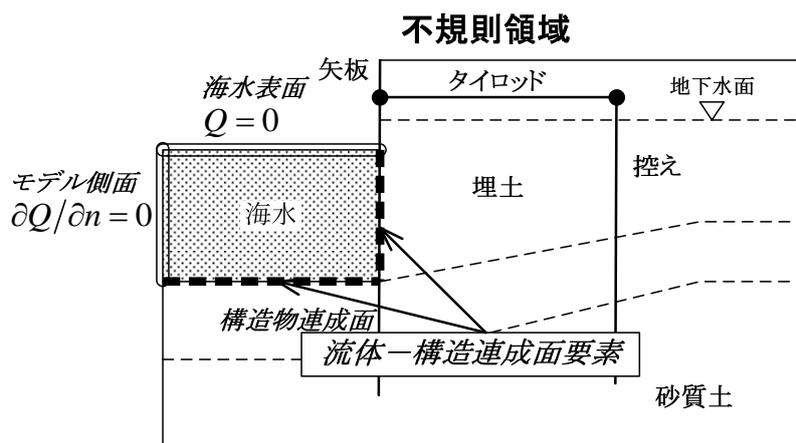


図 3-2-3 海水領域の境界条件

### (5) 模型振動実験で用いられる境界条件

液状化を対象とした模型振動実験では、剛土槽またはせん断土槽が用いられることが多い。模型振動実験の再現を目的とした有効応力解析においては、実験で用いた土槽の挙動にあわせた境界条件の設定が必要である。

剛土槽は土槽の底面と側面が一体となって振動するため、境界条件は底面で固定境界、側面で鉛直ローラーとなる。この境界条件は、地震応答解析の前に実施する初期自重解析と同じである。

せん断土槽は多層に枠が積み重なったもので、模型地盤が振動によって変形する際に、模型地盤は土槽によって動きを拘束されず、水平方向に一樣なせん断変形が可能な土槽である。解析ではせん断土槽をモデル化することも可能であるが、同じ高さにある解析モデル両側節点の水平自由度を MPC 指定することで、せん断土槽を用いた模型地盤の変形挙動の再現が容易である。

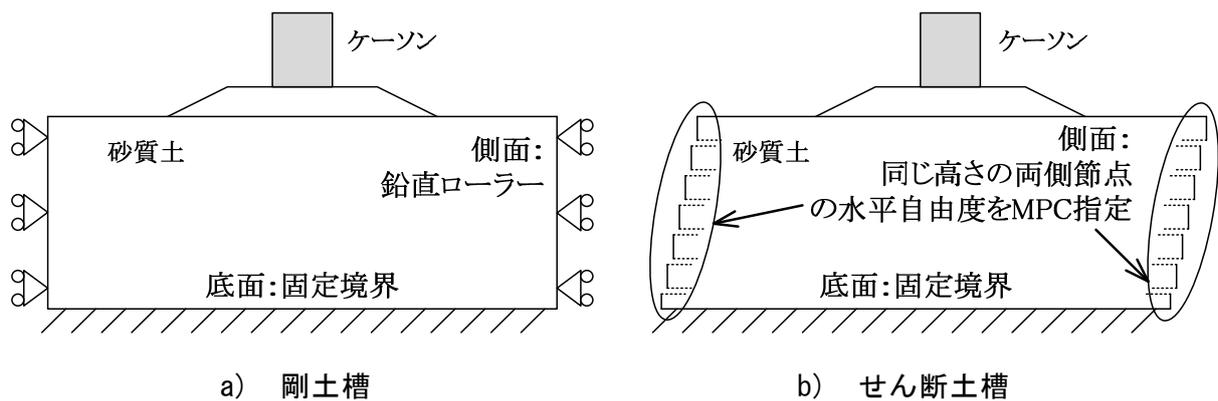


図 3-2-4 模型振動実験を対象とした境界条件

### 3-2-2 基盤面の設定

シナリオ地震動は工学的基盤面への入射波（2E波）として設定されていることが一般的であるため、地震応答解析の際には適切な工学的基盤を設定し、解析領域底面（工学的基盤面）に粘性境界を設定する必要がある。

港湾の基準<sup>5)</sup>では工学的基盤を、それよりも下方にある全ての土層が以下のいずれかである土層としている。

- ・ 岩盤
- ・ N値が 50 以上の砂質土層
- ・ 一軸圧縮強度が 650kN/m<sup>2</sup> 以上の粘性土層
- ・ せん断波速度が 300m/s 以上の土層

一般的に、ここで設定された工学的基盤の上面を工学的基盤面とし、そこを解析領域の底面とする場合が多い。工学的基盤面が深い等の理由で工学的基盤面より上の領域をすべて解析領域に含めることが難しい場合には、工学的基盤ほどでなくてもある程度剛性の高い土層の上面を解析上の基盤面として設定し、工学的基盤面における 2E 波を一次元の地盤応答解析により解析上の基盤面における 2E 波に変換した上で入力する方法も用いられる。

#### < 3章の参考文献 >

- 1) 一井康二：港湾構造物設計事例集（平成 19 年 改訂版）上巻 第 1 編共通 第 5 章動的解析による変形照査、pp.1-39、2007.
- 2) Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L.: Finite dynamic model for infinite media、 Journal of the Engineering Mechanics Division、 ASCE、 No.EM4、 pp.859-877、 August、 1969.
- 3) 戸田孝史、浜田友康、高原秀夫、沖見芳秀、藤村和也：液状化を考慮した非線形動的解析における側方境界条件について、土木学会第 54 回年次学術講演会、Vol.III-B、pp.776-777、1999.
- 4) Joyner, W.B. and Chen, A.T.F.: Calculation of nonlinear ground response in earthquake、 Bulletin of the Seismological Society of America、 Vol.65、 No.5、 pp.1315-1336、 1975.
- 5) 日本港湾協会：港湾の施設の技術上の基準・同解説 上巻 第 3 編 4 章、p.330、2007.

#### 4. 種々の要素

FLIP には、地盤要素として用いるマルチスプリング要素（飽和土には間隙水要素も使用）以外に、種々の要素が用意されている。これまでに利用できる要素の種類は、マルチスプリング要素と間隙水要素を除けば、表 4-1に示す通りである。以下では、これら各要素の理論についてそれぞれ述べる。

表 4-1 FLIP において利用可能な要素（マルチスプリング要素と間隙水要素除く）

要素	説明	バージョン情報
線形はり要素	下記のいずれかを選択可（①が推奨）。 ① 2次元アイソパラメトリックはり ② 2次元曲げせん断はり	ver.4.1～曲げはり使用可、奥行き幅指定可 ver.4.2～個別減衰指定可
線形平面要素	三角形または四辺形の平面ひずみのアイソパラメトリック要素。	ver.4.1～SRI 導入、奥行き幅指定可 ver.4.2～個別減衰指定可
線形ばね要素	節点間線形ばね要素。全体座標系の並進・回転の3成分のばね定数を定義。	ver.4.2～個別減衰指定可
非線形はり要素	2次元アイソパラメトリックはり要素に以下の非線形特性を指定可。 ① バイリニア型（軸力影響考慮可） ② トリリニア型 ※非線形特性は曲げのみに適用。せん断および軸成分に関しては線形のまま。	ver.4.2～初期導入（バイリニアのみ） ver.4.3～軸力影響考慮可（バイリニアのみ）、トリリニア導入
非線形ばね要素	2節点間の軸方向を指定可。軸方向、せん断方向、回転方向の3成分の非線形ばねをそれぞれ独立して指定可。 ① バイリニア型 ② トリリニア型 ③ 非線形弾性（線形ばねとして使用可）	ver.4.2～初期導入（バイリニアと非線形弾性） ver.4.3～トリリニア導入
ジョイント要素	構造要素間の接触面の滑り・剥離を考慮する要素。	ver.4.1～AA、BB 導入、奥行き幅指定可
流体要素	海水等のモデル化要素（動水圧算定用）。	ver.4.1～奥行き幅指定可
流体－構造連成面要素	流体要素と構造要素の間に挿入する要素（動水圧算定用）。	ver.4.1～奥行き幅指定可
側方地盤要素（側方粘性境界要素）	不規則領域側面に使用する粘性要素。	ver.4.1～奥行き幅指定可
下方地盤要素（底面粘性境界要素）	不規則領域底面に使用する粘性要素。	ver.4.1～奥行き幅指定可
ダンパー要素	節点間ダンパー要素。全体座標系の並進2成分の粘性係数を定義。	ver.3.3～変更なし
節点集中質量要素	1質点要素を1節点で定義。	ver.3.3～変更なし
利用者定義非線形はり要素	利用者作成の非線形はり要素を導入可。標準装備として修正武田モデル導入。	ver.7.1.6～初期導入
杭－地盤相互作用ばね要素	杭（2次元はり要素）と地盤（マルチスプリング要素）の節点間に挿入する相互作用ばね要素。	ver.5.1.6～初期導入

#### 4-1 線形はり要素

##### (1) 2次元アイソパラメトリックはり要素<sup>1)</sup>

右図に示すように2ないし3節点のまっすぐなはり要素を考え、これに対し要素座標系  $x'y'$  を導入する。節点  $i$  の要素座標は  $x'_i$  となる。

この要素は、1節点当り並進2自由度、回転1自由度を持ち、要素座標系では、これらは図に示したように  $u'_i$ 、 $v'_i$ 、 $\theta'_i$  となる。

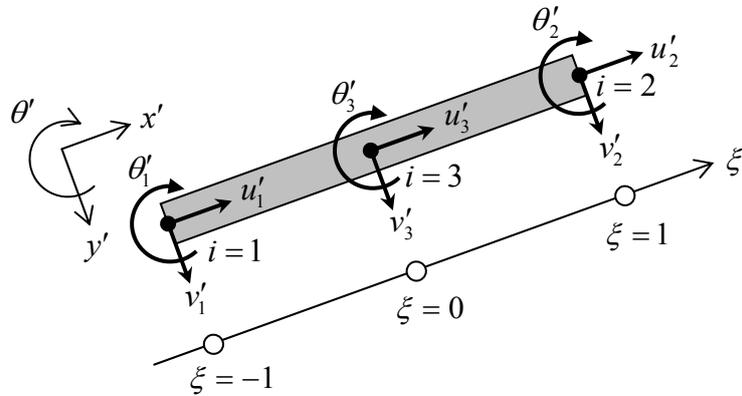


図 4-1-1 アイソパラメトリックはり

自然座標  $\xi$  および補間関数  $h_i(\xi)$  を導入し、要素の中立軸上の任意の位置  $x'$ 、および当該位置  $x'$  における変位  $u'$ 、 $v'$ 、 $\theta'$  は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} x' &= \sum_i h_i(\xi) x'_i \\ u' &= \sum_i h_i(\xi) u'_i \\ v' &= \sum_i h_i(\xi) v'_i \\ \theta' &= \sum_i h_i(\xi) \theta'_i \end{aligned} \right\} \quad (4-1-1)$$

変位  $u'$ 、 $v'$ 、 $\theta'$  に関する補間式をまとめると、以下のように表される。

$$\{u'\} = H\{U'\} \quad (4-1-2)$$

ここに、

$$\{u'\}^T = (u' \quad v' \quad \theta') \quad (4-1-3)$$

$$\{U'\}^T = (u'_1 \quad v'_1 \quad \theta'_1 \quad u'_2 \quad v'_2 \quad \theta'_2 \quad u'_3 \quad v'_3 \quad \theta'_3) \quad (4-1-4)$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & & & h_2 & & & h_3 & & \\ & h_1 & & h_2 & & & h_3 & & \\ & & h_1 & & h_2 & & h_3 & & \\ & & & h_1 & & h_2 & & h_3 & \end{bmatrix} \quad (4-1-5)$$

なお、補間関数とその導関数は、3節点要素の場合は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) & , & & \frac{\partial h_1}{\partial \xi} &= \xi - \frac{1}{2} \\ h_2 &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi) & , & & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} &= \xi + \frac{1}{2} \\ h_3 &= (1-\xi)(1+\xi) & , & & \frac{\partial h_3}{\partial \xi} &= -2\xi \end{aligned} \right\} \quad (4-1-6)$$

また、2節点要素の場合は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi) & , & & \frac{\partial h_1}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \\ h_2 &= \frac{1}{2}(1+\xi) & , & & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4-1-7)$$

ここで、はり要素の変形は、図 4-1-2に示すように、変形前に中立軸に対して垂直な線は、変形後も直線を保つと仮定するが、その直線は変形後の中立軸に対する法線と一致する必要はない。このような方法でせん断変形を考慮するはり要素は、Timoshenko のはり理論に基づくものであるが、これを有限要素法に組み込まれるアイソパラメトリック要素に拡張するため、ここでは「アイソパラメトリックはり要素」と呼ぶ。

このような変形に対する要素のひずみベクトル  $\{\varepsilon\}$  は、次のように表される。

$$\{\varepsilon\}^T = (\varepsilon' \quad \phi' \quad \gamma') \quad (4-1-8)$$

ここに、

$$\varepsilon' = \frac{\partial u'}{\partial x'} = \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial x'} u'_i \quad (\text{軸ひずみ}) \quad (4-1-9)$$

$$\phi' = \frac{\partial \theta'}{\partial x'} = \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial x'} \theta'_i \quad (\text{曲率}) \quad (4-1-10)$$

$$\gamma' = \theta' - \frac{\partial v'}{\partial x'} = \sum_i h_i \theta'_i - \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial x'} v'_i \quad (\text{せん断角}) \quad 4-1-11$$

また、このひずみベクトル  $\{\varepsilon\}$  は、節点変位ベクトル  $\{U'\}$  と次のように関連づけることができる。

$$\{\varepsilon\} = B\{U'\} \quad (4-1-12)$$

但し、



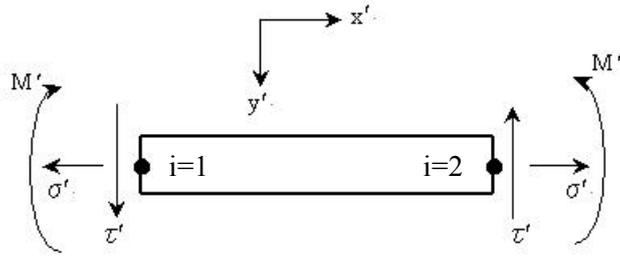


図 4-1-3 力とモーメントの向き

応力  $\{\sigma\}$  とひずみ  $\{\varepsilon\}$  の関係は、次式で表される。

$$\{\sigma\} = D\{\varepsilon\} \quad (4-1-16)$$

又は、

$$\begin{Bmatrix} \sigma' \\ M' \\ \tau' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & \\ & EI_{Z'} & \\ & & GA_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon' \\ \phi' \\ \gamma' \end{Bmatrix} \quad (4-1-17)$$

ここに、

- $E$  : ヤング率
- $A$  : 断面積
- $I_{Z'}$  : ( $Z'$  軸まわりの) 断面 2 次モーメント
- $G$  : せん断剛性
- $A_y$  : せん断有効面積

さて、はり要素に慣性力および節点集中力が付いている場合、ハミルトンの原理より次式を得る。

$$\int \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dx' + \iint \delta\{\tilde{u}'\}^T \rho\{\ddot{u}'\} dx'dy' - \delta\{U\}^T \{F'\} = 0 \quad (4-1-18)$$

ここで、 $\delta$  は仮想変位又はこれに応ずる仮想ひずみを表す。また、 $\{F'\}$  は節点集中力を、 $\{\tilde{u}'\}$  は要素中の任意の位置（中立軸上とは限らない）における変位を表す。すなわち、

$$\{F'\}^T = (p'_1 \quad q'_1 \quad m'_1 \quad p'_2 \quad q'_2 \quad m'_2 \quad p'_3 \quad q'_3 \quad m'_3) \quad (4-1-19)$$

$$\{\tilde{u}'\}^T = (\tilde{u}' \quad \tilde{v}') \quad (4-1-20)$$

なお、 $p'_i$ 、 $q'_i$ 、 $m'_i$  は節点  $i$  に働く  $x'$  方向並進力、 $y'$  方向並進力、 $\theta'$  方向モーメントを表す。また  $\{\tilde{u}'\}$  は中立軸上の値を用いて、

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}' \\ \tilde{v}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad (4-1-21)$$

あるいは、ベクトル記号を用いて、

$$\{\tilde{u}'\} = S\{u'\} \quad (4-1-22)$$

と書ける。

式(4-1-18)は、以下のように書き換えることができる。

$$\delta\{U'\}^T (K'\{U'\} + M'\{\ddot{U}'\} - \{F'\}) = 0 \quad (4-1-23)$$

ここに、 $K'$ は要素剛性行列で、

$$K' = \int B^T DB \, dx' = \int_{-1}^1 B^T DB \frac{\partial x'}{\partial \xi} d\xi \quad (4-1-24)$$

また、 $M'$ は要素質量行列で、

$$M' = \iint \rho H^T S^T S H \, dx' dy' \quad (4-1-25)$$

$$= \int \rho H^T \mathbf{S} H \, dx' \quad (4-1-26)$$

但し、

$$\mathbf{S} = \int S^T S \, dy' \quad (4-1-27)$$

$$= \int \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y' \\ 0 & 1 & 0 \\ -y' & 0 & y'^2 \end{bmatrix} dy' \quad (4-1-28)$$

$$= \begin{bmatrix} A & & \\ & A & \\ & & I_{z'} \end{bmatrix} \quad (4-1-29)$$

ここで、 $A$ は $z'$ 方向単位巾当りの断面積、 $I_{z'}$ は $z'$ 軸まわりの断面2次モーメントを表す。集中質量マトリクスを求める場合は、式(4-1-26)の計算において、補関関数 $h_i$ を次のようにおく。

$$\begin{aligned}
h_1 &= 1 \quad (-1 \leq \xi \leq -k) \\
&= 0 \quad (\text{その他}) \\
h_2 &= 1 \quad (k \leq \xi \leq 1) \\
&= 0 \quad (\text{その他}) \\
h_3 &= 1 \quad (-k \leq \xi \leq k) \\
&= 0 \quad (\text{その他})
\end{aligned} \tag{4-1-30}$$

ここに、 $k$ は

$$k = \begin{cases} 0 & (2 \text{ 節点要素の場合}) \\ \frac{1}{2} & (3 \text{ 節点要素の場合}) \end{cases} \tag{4-1-31}$$

この補間関数を用いると、 $\int h_i h_j dx'$  は次のように求まる。

$$\int h_i h_j dx' = 0 \quad (i \neq j) \tag{4-1-32}$$

$$\int h_1^2 dx' = \int_{-1}^{-k} \frac{\partial x'}{\partial \xi} d\xi \tag{4-1-33}$$

$$\int h_2^2 dx' = \int_k^1 \frac{\partial x'}{\partial \xi} d\xi \tag{4-1-34}$$

$$\int h_3^2 dx' = \int_{-k}^k \frac{\partial x'}{\partial \xi} d\xi \tag{4-1-35}$$

なお、

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial x'}{\partial \xi} d\xi = \left( \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} \right) (x'_1 + x'_2 - 2x'_3) - \left( \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) (x'_2 - x'_1) \tag{4-1-36}$$

(3 節点要素の場合)

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial x'}{\partial \xi} d\xi = \left( \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) (x'_2 - x'_1) \tag{4-1-37}$$

(2 節点要素の場合)

全体座標系と要素座標系の関係は右図のとおりであり、両座標系間のベクトルの変換は次式による。

$$\{U'\} = T\{U\} \quad (4-1-38)$$

$$\{F'\} = T\{F\} \quad (4-1-39)$$

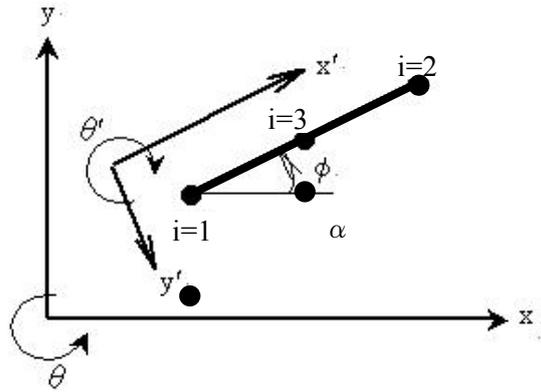


図 4-1-4 座標系

但し、 $\{U\}$ 、 $\{F\}$ は全体座標系による節点変位、節点集中力を成分とするベクトルである。また、座標変換マトリクス $T$ は次のように表される。

$$T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & | & & | & & & \\ s & -c & 0 & | & 0 & & | & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & | & & & | & & \\ \hline & & & | & c & s & 0 & | & \\ 0 & & & | & s & -c & 0 & | & 0 \\ & & & | & 0 & 0 & -1 & | & \\ \hline & & & | & & & & | & c & s & 0 \\ 0 & & & | & & & & | & s & -c & 0 \\ & & & | & & & & | & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4-1-40)$$

$$(c \equiv \cos \alpha, s \equiv \sin \alpha)$$

さらに、全体座標系のもとでの要素剛性行列 $K$ は、

$$K = T^T K' T \quad (4-1-41)$$

となる。要素質量行列 $M$ についても同様に、

$$M = T^T M' T \quad (4-1-42)$$

となる。

(2) 2次元曲げせん断はり要素<sup>2)</sup>

2次元アイソパラメトリックはり要素が Timoshenko のはり理論に基づいてせん断変形を考慮しているのに対し、2次元曲げせん断はり要素では、従来のはりの曲げ理論（変形前に中立軸に対して垂直な線は、変形後も直線のままで、かつ変形後の中立軸に対して垂直であるという仮定を用いた Bernoulli-Euler のはり理論）を用いて、せん断変形を曲げによる変形とわけて考慮している。一般に、2次元アイソパラメトリックはり要素の方が現実に近い解が得られることが知られていることから、はり要素の種類による影響を調べる等の研究目的等を除いて、通常的设计実務においては本2次元曲げせん断はり要素を使用する必要はない。以下、参考までに本2次元曲げせん断はり要素の理論を簡単に示す。

部材座標系は、第1節点から第2節点に向けて、 $x$ 軸、また紙面（ $xy$ 面）上向きに $z$ 軸をとり、 $y$ 軸は右手座標系になるように定められる。

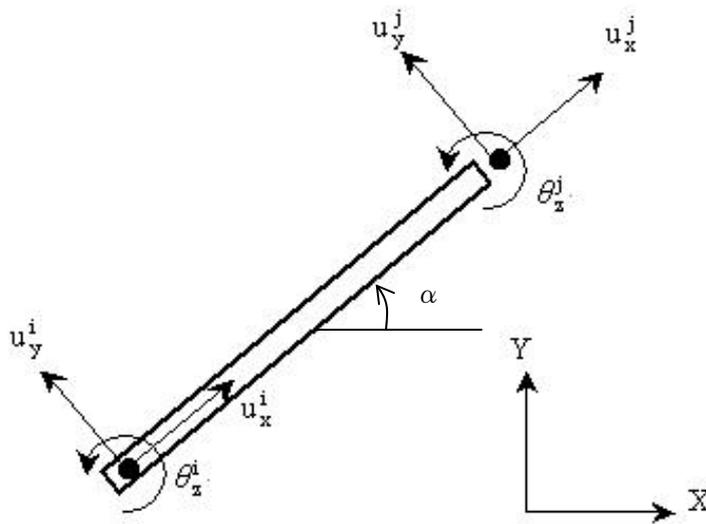


図 4-1-5 2次元曲げせん断はり

部材座標系における部材力  $\{F\}_{local}$ 、変位  $\{u\}_{local}$  を

$$\{F\}_{local} = \begin{Bmatrix} F_x^i \\ F_y^i \\ M_z^i \\ F_x^j \\ F_y^j \\ M_z^j \end{Bmatrix} \quad \{u\}_{local} = \begin{Bmatrix} u_x^i \\ u_y^i \\ \theta_z^i \\ u_x^j \\ u_y^j \\ \theta_z^j \end{Bmatrix} \quad (4-1-43)$$

とする時の、要素剛性行列、要素質量行列を以下に示す。



各変形量は部材系変位を用いて次のように表す。

$$\text{軸方向変形} \quad \varepsilon = u_x^j - u_x^i \quad (4-1-48)$$

$$\text{せん断角} \quad \gamma = \frac{\Phi_y}{(1+\Phi_y)} \left[ \frac{u_y^j - u_y^i}{\ell} - \frac{\theta_y^j - \theta_y^i}{2} \right] \quad (4-1-49)$$

$$\text{曲率} \quad \rho = (\theta_z^j - \theta_z^i) / \ell \quad (4-1-50)$$

上記に対応する応力は次式で計算する。

$$\text{軸力} \quad \sigma = \frac{EA}{\ell} (u_x^j - u_x^i) \quad (4-1-51)$$

$$\text{せん断力} \quad \tau = GA_y \gamma \quad (4-1-52)$$

曲げモーメント

$$\text{(i 端)} \quad M_i = -\frac{\ell}{2} \tau - EI_z \frac{\theta_y^j - \theta_y^i}{\ell} \quad (4-1-53)$$

$$\text{(j 端)} \quad M_j = -\frac{\ell}{2} \tau + EI_z \frac{\theta_y^j - \theta_y^i}{\ell} \quad (4-1-54)$$

なお、座標変換マトリクス  $T$  はアイソパラメトリックはり要素の座標定義と異なるため、次式のように表される。

$$T = \begin{bmatrix} c & -s & & & & \\ s & c & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & c & -s & \\ 0 & & & s & c & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4-1-55)$$

( $c \equiv \cos \alpha$  ,  $s \equiv \sin \alpha$ )

全体座標系における要素剛性行列  $K$  および要素質量行列  $M$  は、以下のようになる。

$$K = T^T K_{local} T \quad (4-1-56)$$

$$M = T^T M_{local} T \quad (4-1-57)$$

### (3) 線形はり要素を使用する際の注意事項

アイソパラメトリックはり要素と曲げせん断はり要素の2種類のうち、原則として実際の現象に近いとされるアイソパラメトリックはり要素を用いる。ただし、アイソパラメトリックはり要素の場合は積分次数の指定が必要になり、通常の積分次数ではせん断ロックが生じてしまうため、一次低減させる必要がある。すなわち、3節点要素を用いる場合は2次、2節点要素を用いる場合は1次にしなければならない。

また、アイソパラメトリックはり要素を用いる場合、せん断変形を無視する場合は、式(4-1-17)中のせん断剛性 $GA_y$ を大きな値にする必要があるが、あまり大きくしすぎても剛性マトリクスの条件が悪くなる。せん断変形を無視できる適当なせん断剛性 $GA_y$ の値は、曲げ剛性 $EI_z$ の $10^4$ 倍程度がよい。

式(4-1-17)に関するFLIPの入力データは、せん断弾性係数 $G$ 、ポアソン比 $\nu$ 、断面積 $A$ 、断面二次モーメント $I_z$ 、有効せん断面積率 $e_f$ の5つであり、式(4-1-17)中の各剛性(軸剛性 $EA$ 、曲げ剛性 $EI_z$ 、せん断剛性 $GA_y$ )は、次のように与えられる。

$$EA = 2G(1+\nu)A \quad (4-1-58)$$

$$EI_z = 2G(1+\nu)I_z \quad (4-1-59)$$

$$GA_y = Ge_f A \quad (4-1-60)$$

ここで、有効せん断面積率を $e_f = 0.0$ とすれば、プログラム内部では $GA_y = 0.0$ とはならず、次式が自動的に設定される。

$$GA_y = EI_z \times 10^4 \quad (e_f = 0.0 \text{ のとき}) \quad (4-1-61)$$

なお、曲げせん断はり要素を用いた場合、せん断変形の影響を無視する場合は、 $e_f = 0.0$ とすれば、式(4-1-44)および式(4-1-45)において $\Phi_y = 0.0$ が自動的に設定され、曲げはりとして扱われる。

有効せん断面積率 $e_f$ は断面形状により異なり、代表的な断面における有効せん断面積率を以下に示す。

$$\text{長方形} \quad e_f = \frac{1}{1.2} \cong 0.833$$

$$\text{中空の円 (円筒)} \quad e_f = \frac{1}{2} = 0.50$$

$$\text{円 (円柱)} \quad e_f = \frac{9}{10} = 0.90$$

なお、矢板等の薄肉はりの場合は、せん断変形は無視できるので、 $e_f = 0.0$ とする。

## 4-2 線形平面要素

平面ひずみ状態における線形平面要素の応力～ひずみ関係は次式で表される<sup>3)</sup>。

$$\{\varepsilon\} = D\{\sigma\} \quad (4-2-1)$$

但し、

$$\{\varepsilon\}^T = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}) \quad (\text{ひずみ}) \quad (4-2-2)$$

$$\{\sigma\}^T = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}) \quad (\text{応力}) \quad (4-2-3)$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4-2-4)$$

ここに、 $E$ はヤング率、 $\nu$ はポアソン比である。

なお、要素形状はマルチスプリング要素と同じ4節点アイソパラメトリック要素を用いている。また、中間節点を持つ8節点アイソパラメトリック要素も組み込まれてはいるが、実用には4節点アイソパラメトリック要素のみで十分である。

### 4-3 線形ばね要素

#### (1) 線形ばねの定式化

線形ばね要素は、図 4-3-1に示すように、2 節点間を結ぶ全体座標系における並進ばね 2 成分と回転ばねで構成する。全体座標系における線形ばね要素の変位～力関係は次式で表される。

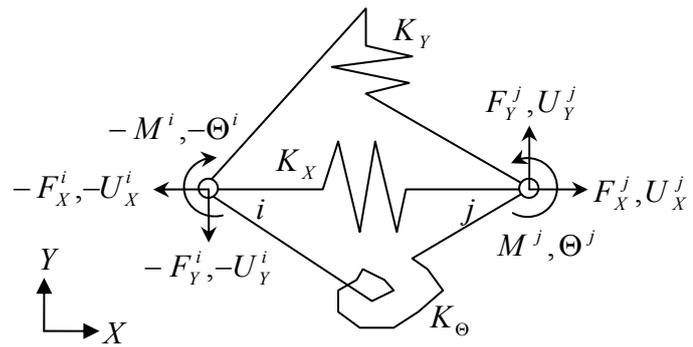


図 4-3-1 線形ばね要素

$$\{F\} = K\{U\} \quad (4-3-1)$$

但し、

$$\{F\}^T = (F_X^i \quad F_Y^i \quad M^i \quad F_X^j \quad F_Y^j \quad M^j) \quad (4-3-2)$$

$$\{U\}^T = (U_X^i \quad U_Y^i \quad \Theta^i \quad U_X^j \quad U_Y^j \quad \Theta^j) \quad (4-3-3)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_X & & & -K_X & & \\ & K_Y & & & -K_Y & \\ & & K_\Theta & & & -K_\Theta \\ -K_X & & & K_X & & \\ & -K_Y & & & K_Y & \\ & & -K_\Theta & & & K_\Theta \end{bmatrix} \quad (4-3-4)$$

ここに、 $K_X$  は水平ばね定数、 $K_Y$  は鉛直ばね定数、 $K_\Theta$  は回転ばね定数である。

#### (2) 線形ばね要素を使用する際の注意事項

線形ばね要素では、直接水平ばねと鉛直ばねを定義するため、任意方向の線形ばねを定義する場合は水平ばねと鉛直ばねを組み合わせる必要がある。具体的には、図 4-3-2に示すように全体座標系  $X$  軸（水平軸）に対して反時計回りに  $\alpha$  傾いた方向のばね（ばね定数  $K$ ）を定義するには、次式を用いて設定すればよい。

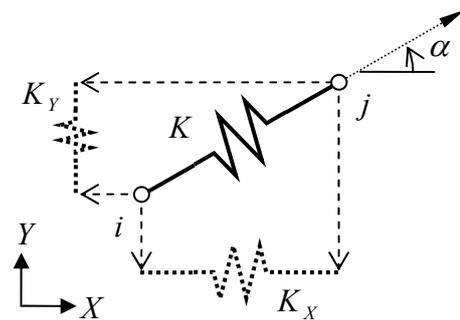


図 4-3-2 傾斜した線形ばね

$$K_X = K \cos \alpha \quad (4-3-5)$$

$$K_Y = K \sin \alpha \quad (4-3-6)$$

#### 4-4 非線形はり要素

非線形はり要素は、線形はりのアイソパラメトリックはり要素を拡張し、 $M \sim \phi$  関係を規定する曲げ剛性 (式(4-1-17)における  $EI_2$ ) に関して材料非線形性を考慮したものである。軸剛性およびせん断剛性に関しては線形のままである。

本非線形はり要素が扱える非線形特性には、骨格曲線としてバイリニアとトリリニアの2種類があり、履歴曲線としては Masing 則を適用している。また、バイリニアについては曲げの向きに関する第一折れ点の非対称性を考慮でき、さらに、軸力の影響による第一折れ点の変化も考慮できる。

##### (1) バイリニアモデル

図 4-4-1 にバイリニアモデルの履歴曲線を示す。図中、 $EI_0$  は線形弾性時の曲げ剛性、 $EI_2$  は第一折れ点以降の勾配、 $\phi_p$  は第一折れ点の曲率、 $M_p$  は第一折れ点の曲げモーメントで、これらのうち  $EI_0$ 、 $EI_2$ 、 $M_p$  はバイリニアモデルを規定するのに必要な最小限のパラメータである。 $\phi_p$  および  $M_p$  は、鋼材を対象とした場合の全塑性時に相当するが、モデル化に応じて降伏時に対応させてもよい。また、RC 部材を対象にする場合は、モデル化に応じて第一折れ点をひび割れ時、降伏時、または終局時に対応させる。

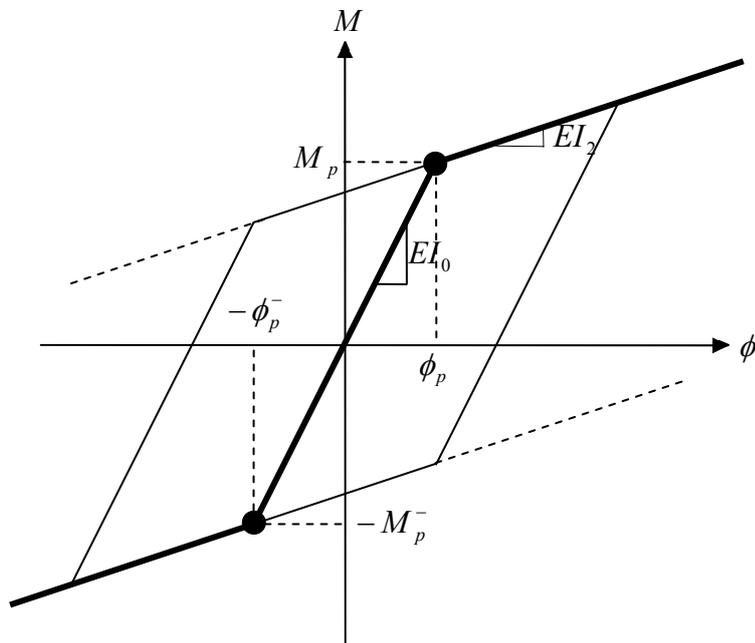


図 4-4-1 バイリニアモデル

$\phi_p^-$  および  $M_p^-$  は、曲げの方向に関して非対称な場合に必要となるパラメータであるが、入力を要求されるパラメータは  $M_p^-$  のみで、 $\phi_p^-$  は  $M_p^-$  と  $EI_0$  からプログラム内部で設定される。

バイリニアモデルにおいては、発生軸力に応じて第一折れ点の曲げモーメント（鋼材の場合の全塑性モーメントに対応）の影響を考慮できる。長方形断面および鋼管断面の場合は、次式に示す軸力による全塑性曲げモーメントの低減式<sup>4)</sup>がプログラム内部に組み込まれている。

$$M_{pc} = M_p \left\{ 1 - \left( \frac{N}{N_y} \right)^2 \right\} \quad (\text{長方形断面}) \quad (4-4-1)$$

$$M_{pc} = M_p \cos \left( \frac{\pi N}{2 N_y} \right) \quad (\text{鋼管断面}) \quad (4-4-2)$$

ここに、 $M_{pc}$  は低減後の全塑性曲げモーメント、 $N_y$  は降伏軸方向力である。

また、図 4-4-2 に示すような M-N 関係を定義することにより、発生軸力に応じた全塑性曲げモーメントの低減が可能である。

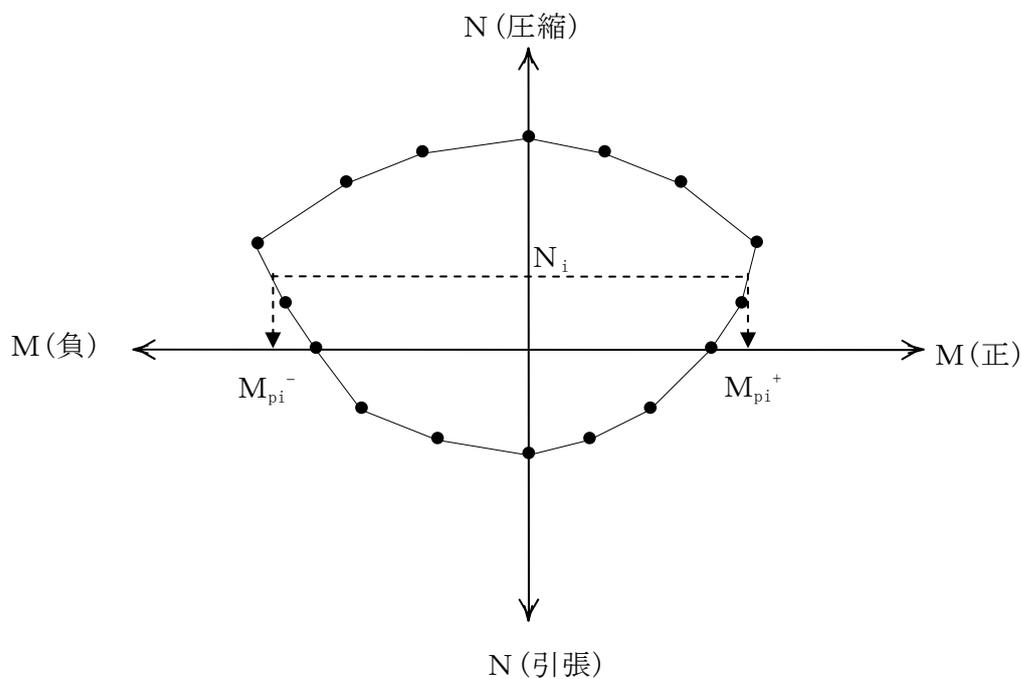


図 4-4-2 M-N 関係の定義

## (2) トリリニアモデル

図 4-4-3 にトリリニアモデルの履歴曲線を示す。図中、 $EI_0$  は線形弾性時の曲げ剛性、 $EI_1$  は第一折れ点から第二折れ点間の勾配、 $EI_2$  は第二折れ点以降の勾配、 $M_y$  は第一折れ点の曲げモーメント、 $M_p$  は第二折れ点の曲げモーメントで、これらはトリリニアモデルを規定するのに必要となるパラメータである。 $\phi_y$  および  $\phi_p$  は、与えられたパラメータ ( $EI_0$ 、 $EI_1$ 、 $M_y$ 、 $M_p$ ) からプログラム内部で設定される。 $M_y$  および  $M_p$  は、それぞれ鋼材を対象とした場合の降伏時および全塑性時に相当する。また、RC 部材を対象にする場合は、モデル化に応じて第一折れ点をひび割れ時に、第二折れ点を降伏時に対応させるか、または、第一折れ点を降伏時に、第二折れ点を終局時に対応させる。

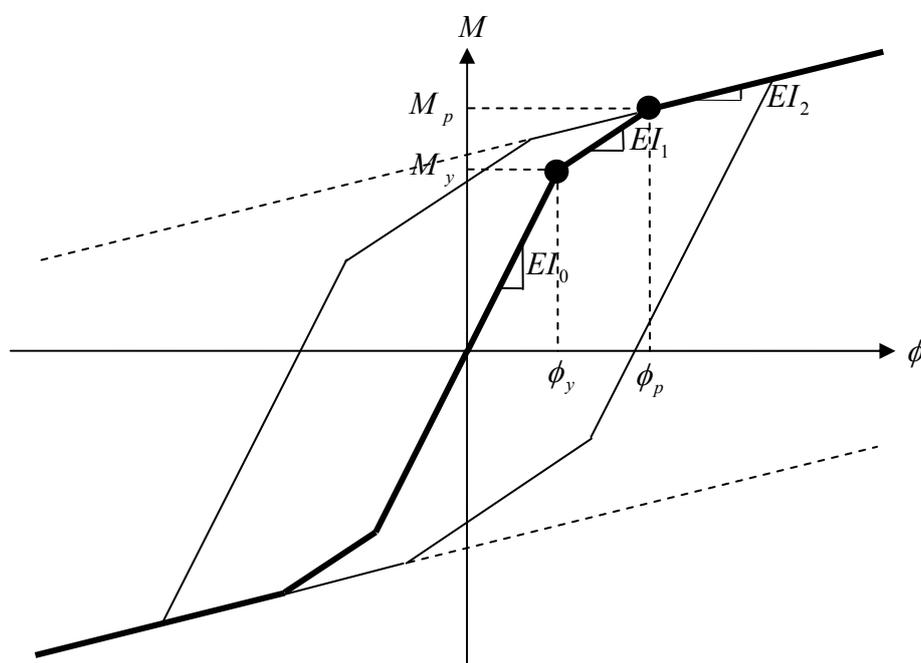


図 4-4-3 トリリニアモデル

## 4-5 非線形ばね要素

### (1) 非線形ばねの定式化

非線形ばね要素は、図 4-5-1に示すように、任意方向の2節点間を軸方向ばね、せん断方向ばね、および回転ばねで結んだものであり、各々のばねに対して個別に各種非線形性を考慮できる。なお、線形ばね要素では直接全体座標系のばねを定義していたが、非線形ばねではそのままでは入力が煩雑になってしまうため、任意方向のばねを考慮できるように局所座標系  $ns$  を導入している。

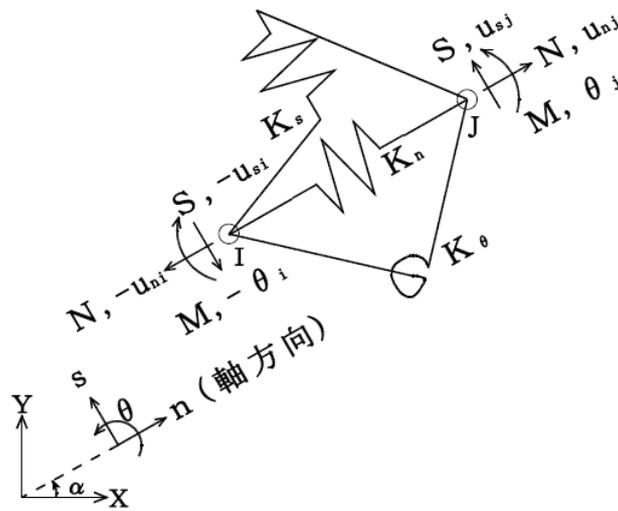


図 4-5-1 非線形ばね

局所座標系  $ns$  における力～変位関係は次式で表される。

$$\{f'\} = K'' \{du\} \quad (4-5-1)$$

但し、

$$\{f'\}^T = (N \quad S \quad M) \quad (4-5-2)$$

$$\{du\}^T = (u_n^j - u_n^i \quad u_s^j - u_s^i \quad \theta^j - \theta^i) \quad (4-5-3)$$

$$K'' = \begin{bmatrix} K_n & & \\ & K_s & \\ & & K_\theta \end{bmatrix} \quad (4-5-4)$$

ここに、 $K_n$ は軸方向ばね定数、 $K_s$ はせん断方向ばね定数、 $K_\theta$ は回転ばね定数である。

ここで、非線形要素に関する変位ベクトルを以下のように並び替えれば、

$$\{u\}^T = (u_n^i \quad u_s^i \quad \theta^i \quad u_n^j \quad u_s^j \quad \theta^j) \quad (4-5-5)$$

力～変位関係は次のように表される。

$$\{f\} = K'\{u\} \quad (4-5-6)$$

但し、

$$\{f\}^T = (-N \quad -S \quad -M \quad N \quad S \quad M) \quad (4-5-7)$$

$$K' = \begin{bmatrix} K_n & & & -K_n & & \\ & K_s & & & -K_s & \\ & & K_\theta & & & -K_\theta \\ -K_n & & & K_n & & \\ & -K_s & & & K_s & \\ & & -K_\theta & & & K_\theta \end{bmatrix} \quad (4-5-8)$$

また、局所座標系  $ns$  から全体座標系への座標変換マトリクスは次式で表される。

$$T = \begin{bmatrix} c & -s & & & & \\ s & c & & & & 0 \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & c & -s & \\ 0 & & & s & c & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4-5-9)$$

$$(c \equiv \cos \alpha, \quad s \equiv \sin \alpha)$$

したがって、全体座標系における要素剛性行列  $K$  は、以下のようになる。

$$K = T^T K' T \quad (4-5-10)$$

## (2) 非線形特性

軸方向ばね、せん断方向ばね、回転方向ばねのそれぞれについて、独立して以下の3種類の非線形特性を考慮できる。

- ① 非線形弾性
- ② バイリニアモデル
- ③ トリリニアモデル

### (a) 非線形弾性

非線形弾性は、図 4-5-2に示すような利用者が定義した骨格曲線の上を動くのみで履歴曲線は描かない。なお、利用者が定義するパラメータは、骨格曲線の折れ点  $(du_i, P_i)$  であり、曲線の勾配  $(K_i)$  はプログラム内部で計算される。また、一番外側の入力点(図 4-5-2を例にとれば、点  $(du_1, P_1)$  と点  $(du_6, P_6)$ ) より外側の骨格曲線は外挿される。

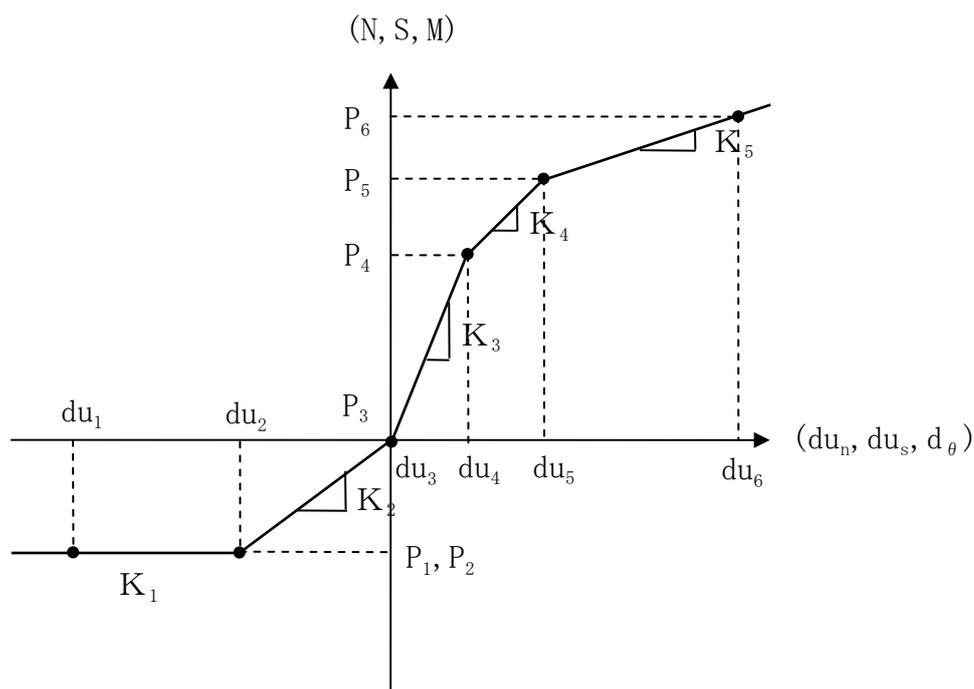


図 4-5-2 非線形弾性

(b)バイリニアモデル

バイリニアモデルの骨格曲線は、図 4-5-3に示すように、 $K_0$ 、 $K_1$ 、 $P_1$ の3つのパラメータで規定され、履歴曲線は Masing 則に従う。

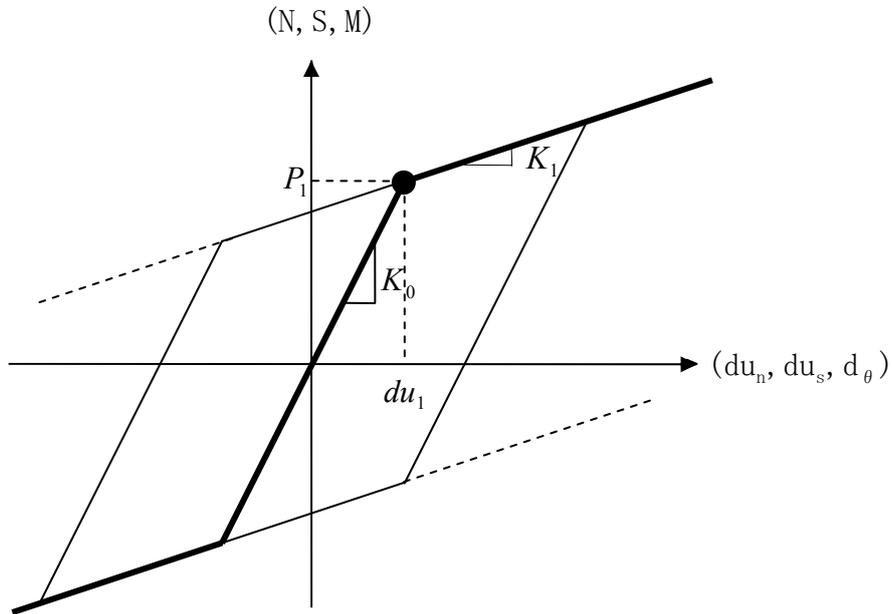


図 4-5-3 バイリニアモデル

(c)トリリニアモデル

トリリニアモデルの骨格曲線は、図 4-5-4に示すように、 $K_0$ 、 $K_1$ 、 $K_2$ 、 $P_1$ 、 $P_2$ の5つのパラメータで規定され、履歴曲線は Masing 則に従う。

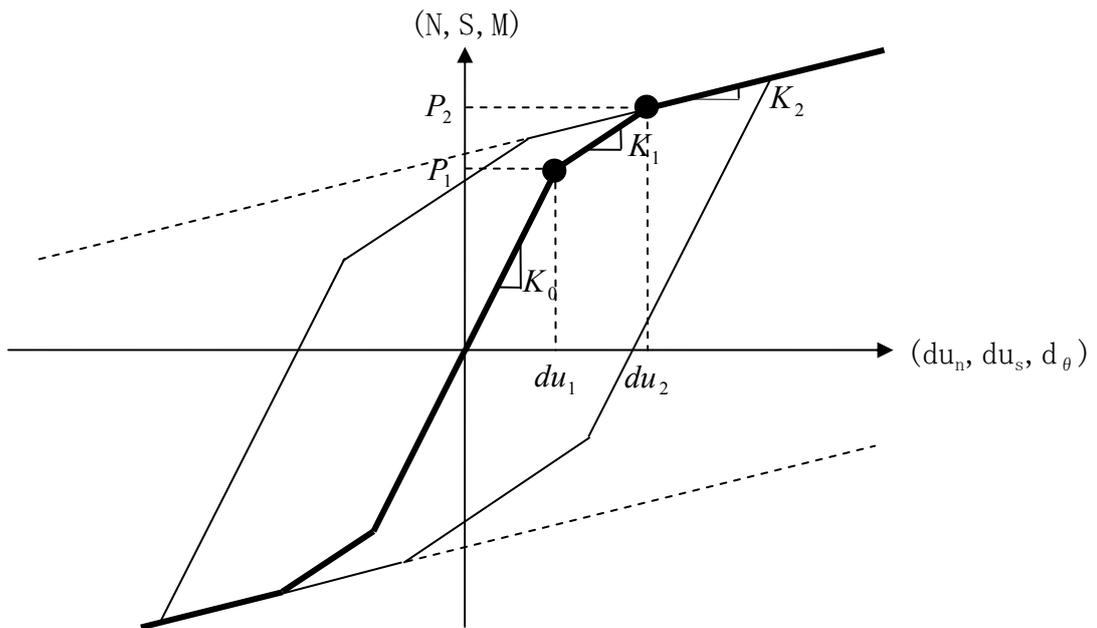


図 4-5-4 トリリニアモデル

#### 4-6 ジョイント要素

引張に対しては分離し、せん断に対してはすべり、圧縮に対しては力を伝達するような不連続面を表すため、右図に示すような4節点2次元ジョイント要素を考える。

この要素については、以下に示すように2通りの定式化が行なわれている。

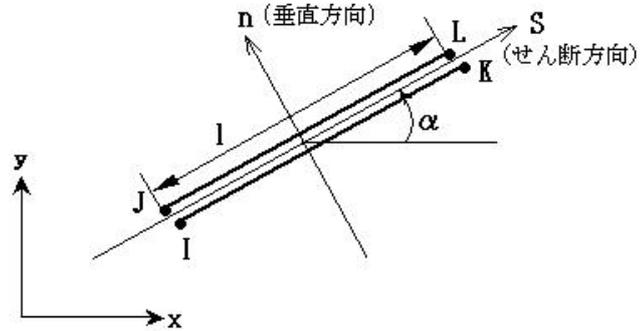


図 4-6-1 4節点ジョイント要素

##### (1) Goodmanによる定式化<sup>5)</sup>

要素座標系 s 方向の節点変位を  $\mu_I, \mu_J, \mu_K, \mu_L$  で表し、又、n 方向のそれを  $v_I, v_J, v_K, v_L$  で表す。節点変位ベクトル  $\{U'\}$  を次のように定義する。

$$\{U'\}^T = (\mu_I, v_I, \mu_J, v_J, \mu_K, v_K, \mu_L, v_L) \quad (4-6-1)$$

さらに、ひずみ  $\{\varepsilon\}$  を次のように定義する。

$$\{\varepsilon\}^T = (\gamma, \varepsilon, \omega) \quad (4-6-2)$$

但し、

$$\gamma = \frac{\mu_J + \mu_L}{2} - \frac{\mu_I + \mu_K}{2} \quad (\text{せん断方向平均変位差}) \quad (4-6-3)$$

$$\varepsilon = \frac{v_J + v_L}{2} - \frac{v_I + v_K}{2} \quad (\text{垂直方向平均変位差}) \quad (4-6-4)$$

$$\omega = \frac{v_L - v_K}{l} - \frac{v_J - v_I}{l} \quad (\text{開き角}) \quad (4-6-5)$$

ひずみと節点変位ベクトルとの間の関係は、次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\} = L_0 \{U'\} \quad (4-6-6)$$

但し、

$$L_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (4-6-7)$$

次に、ジョイント要素の応力を次のように定義する。

$$\{\sigma\}^T = (\tau_{ns}, \sigma_n, M_o) \quad (4-6-8)$$

但し、

$$\tau_{ns} = \frac{1}{\ell}(F_{sJ} + F_{sL}) \quad (\text{せん断応力}) \quad (4-6-9)$$

$$\sigma_n = \frac{1}{\ell}(F_{nJ} + F_{nL}) \quad (\text{垂直応力}) \quad (4-6-10)$$

$$M_o = \frac{l}{2}(F_{nL} + F_{nJ}) \quad (\text{モーメント}) \quad (4-6-11)$$

なお、Fは節点力を表し、第1の添字が方向を、第2の添字が節点を表す。なお、節点ベクトル{F'}を次により定義する。

$$\{F'\}^T = (F_{sI}, F_{nI}, F_{sJ}, F_{sL}, F_{nJ}, F_{sK}, F_{nK}, F_{sL}, F_{nL}) \quad (4-6-12)$$

応力と節点ベクトルとの間には、次の関係がある。

$$\{F'\} = B\{\sigma\} \quad (4-6-13)$$

但し、

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} & \frac{1}{\ell} \\ \frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & -\frac{1}{\ell} \\ -\frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} & -\frac{1}{\ell} \\ -\frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \quad (4-6-14)$$

又、上式の導出に際しては、 $F_{sI} = -F_{sJ}$ などの関係を用いた。

応力-ひずみ関係は、次図に示すように与える。

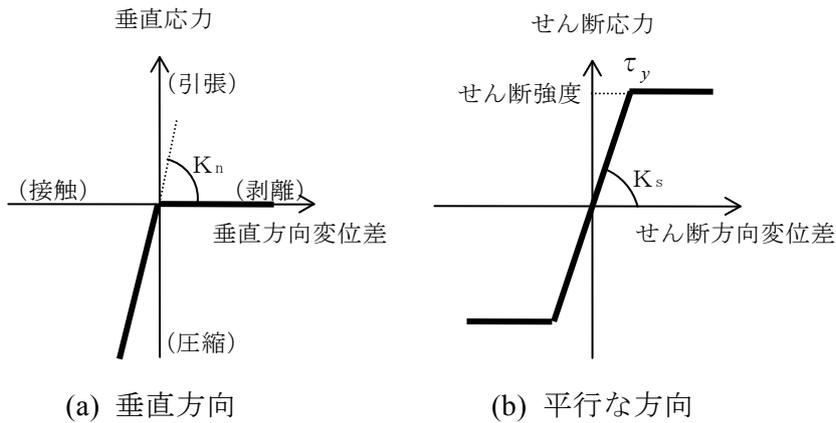


図 4-6-2 応力-ひずみ関係

なお、降伏せん断応力  $\tau_y$  は、次式で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= C_J - \sigma_n \tan \phi_J && (\varepsilon \leq 0 \text{の時}) \\ &= 0 && (\varepsilon > 0 \text{の時}) \end{aligned} \right\} \quad (4-6-15)$$

ここに、 $C_J$  はジョイントの粘着力、 $\phi_J$  はジョイントの摩擦角を表す。さらに、モーメント  $M_o$  と開き角  $\omega$  との関係は、

$$\left. \begin{aligned} M_o &= \frac{1}{4} \ell^3 K_n \omega && (\varepsilon \leq 0 \text{の時}) \\ &= 0 && (\varepsilon > 0 \text{の時}) \end{aligned} \right\} \quad (4-6-16)$$

で与えられるものとする。

以上の関係を用いると、節点変位ベクトルに対する節点力ベクトルを、次に示す手順に従って求めることができる。

$$\{U\} \xrightarrow{\text{座標変換}} \{U'\} \xrightarrow{\text{式(4-6-6)}} \{\varepsilon\} \xrightarrow{\text{図 4-6-2 式(4-6-8)}} \{\sigma\} \xrightarrow{\text{式(4-6-13)}} \{F'\} \xrightarrow{\text{座標変換}} \{F\}$$

但し、 $\{U\}$  および  $\{F\}$  は、全体座標系による成分から成るベクトルを表す。

次に、接線剛性行列  $K'$  を求める。 $K'$  は、

$$K' = \frac{\partial \{F'\}}{\partial \{U'\}} = BCL_o \quad (4-6-17)$$

と表すことができる。但し、 $C$  は次式で与えられる。

$$C = \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \{\varepsilon\}} = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \ell^3 k_n \end{bmatrix} \quad (4-6-18)$$

又、 $k_s$ 、 $k_n$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} k_s &= \frac{\partial \tau_{ns}}{\partial \gamma} = K_s && (|\tau_{ns}| < \tau_y \text{の時}) \\ &= 0 && (|\tau_{ns}| = \tau_y \text{の時}) \end{aligned} \right\} \quad (4-6-19)$$

$$\left. \begin{aligned} k_n &= \frac{d \sigma_n}{d \varepsilon} = K_n && (\varepsilon \leq 0 \text{の時}) \\ &= 0 && (\varepsilon > 0 \text{の時}) \end{aligned} \right\} \quad (4-6-20)$$

接線剛性行列は、式(4-6-17)の行列の乗算を行なうと、次のように求められる。

$$K' = \frac{1}{4} \ell \left[ \begin{array}{cccc|cccc} k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & 2k_n & 0 & -2k_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 \\ 0 & -2k_n & 0 & 2k_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_n & 0 & -2k_n \\ -k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_n & 0 & 2k_n \end{array} \right] \quad (4-6-21)$$

節点変位ベクトルおよび節点力ベクトルは、全体座標系と要素座標系との間で、それぞれ次のような変換を受ける。

$$\{U'\} = T\{U\} \quad (4-6-22)$$

$$\{F'\} = T\{F\} \quad (4-6-23)$$

但し、

$$T = \begin{bmatrix} c & s & & & & & & & \\ -s & c & & & & & & & \\ & & c & s & & & & & \\ & & -s & c & & & & & \\ & & & & c & s & & & \\ & & & & -s & c & & & \\ & & & & & & c & s & \\ & & & & & & -s & c & \end{bmatrix} \quad (4-6-24)$$

$c \equiv \cos \alpha$  ,  $s \equiv \sin \alpha$

この変換行列を用いると、全体座標系における接線剛性行列  $K$  は、

$$K = T^T K' T \quad (4-6-25)$$

として求まる。

## (2) 非線形ばねを用いた定式化

右図に示すように、向かい合う2節点を直交する2本の非線形ばねで結び、それが2組あるようなモデルを考える。図の I、J 節点を結ぶばねは、要素の左半分を、又、K、L 節点を結ぶばねは右半分を代表するものとし、I、J 節点の自由度と K、L 節点の自由度の間には連成を考えない。

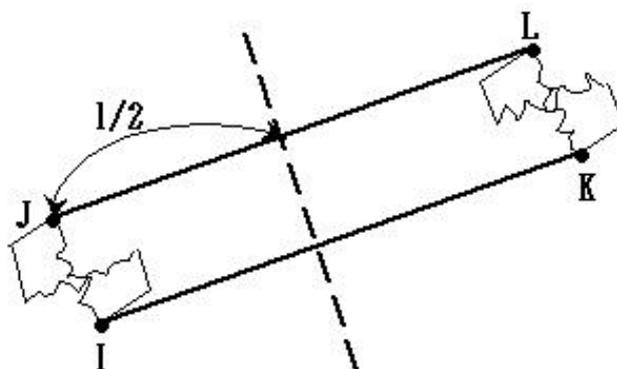


図 4-6-3 非線形ばねを用いたジョイント要素

以下では、図の I、J 節点側のみを考えることにするが、K、L 節点の方もまったく同様に取り扱うことができる。

式(4-6-1)および式(4-6-2)に対応して、節点変位ベクトル  $\{U'\}$  およびひずみ  $\{\varepsilon\}$  を次のように定義する。

$$\{U'\}^T = (\mu_I, v_I, \mu_J, v_J) \quad (4-6-26)$$

$$\{\varepsilon\}^T = (\gamma, \varepsilon) \quad (4-6-27)$$

但し、

$$\gamma = \mu_J - \mu_I \quad (\text{せん断方向変位差}) \quad (4-6-28)$$

$$\varepsilon = v_J - v_I \quad (\text{垂直方向変位差}) \quad (4-6-29)$$

又、 $\{\varepsilon\}$  と  $\{U'\}$  との関係は、次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\} = L_0 \{U'\} \quad (4-6-30)$$

さらに、節点力ベクトル  $\{F'\}$  と応力ベクトル  $\{\sigma\}$  を、

$$\{F'\}^T = (F_{sI}, F_{nI}, F_{sJ}, F_{nJ}) \quad (4-6-31)$$

$$\{\sigma\} = (\tau_{ns}, \sigma_n) \quad (4-6-32)$$

と定義すると、両者の間には、式(4-6-13)と同様、次の関係がある。

$$\{F'\} = B\{\sigma\} \quad (4-6-33)$$

但し、

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{\ell}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\ell}{2} \\ \frac{\ell}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell}{2} \end{bmatrix} \quad (4-6-34)$$

また、ひずみ-応力関係は、図 4-6-2に示すように与える。

以上の関係を用いると、節点変位ベクトルに対する節点力ベクトルを求めることができる。

次に、接線剛性行列  $K'$  は、式(4-6-17)と同様、

$$K' = \frac{\partial\{F'\}}{\partial\{U'\}} = BCL_0 \quad (4-6-35)$$

と表すことができる。但し、ここでは  $C$  は次のようになる。

$$C = \frac{\partial\{\sigma\}}{\partial\{\varepsilon\}} = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (4-6-36)$$

式 4-6-35 の乗算を行なうと、接線剛性行列は次式で表される。

$$K' = \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} k_s & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & k_n & 0 & -k_n \\ -k_s & 0 & k_s & 0 \\ 0 & -k_n & 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (4-6-37)$$

あるいは、全体座標系では次のようになる。

$$K = \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} c^2 k_s + s^2 k_n & csk_s - csk_n & -c^2 k_s - s^2 k_n & -csk_s + csk_n \\ & s^2 k_s + c^2 k_n & -csk_s + csk_n & -s^2 k_s - c^2 k_n \\ \text{Symmetric} & & c^2 k_s + s^2 k_n & csk_s - csk_n \\ & & & s^2 k_s + c^2 k_n \end{bmatrix} \quad (4-6-38)$$

$$(c \equiv \cos \alpha, \quad s \equiv \sin \alpha)$$

### (3) ジョイント要素を使用する際の注意事項

ここでは、Goodman による定式化と非線形ばねによる定式化の 2 通りを示したが、前者は計算が不安定になりやすく実用にはあまり向かない。後者の非線形ばねによる定式化の方は比較的安定して解けるので、実務には原則としてこの非線形ばねによる方法を用いるものとする。

滑りを規定する降伏せん断応力  $\tau_y$  は、接触面法線方向にかかる直応力  $\sigma_n$  に依存するが、この直応力  $\sigma_n$  の算定には、接触面に隣接する地盤要素の有効応力を参照するか、ジョイントを構成する節点にかかる力を参照するかいずれかの方法を選択できる。隣接する地盤要素がマルチスプリング要素の場合は、地盤要素の有効応力を参照するのが一般的である。また、この場合、接触面の両側の有効応力を参照することはできないため、片方のみを指定しなければならない。ケーソンと地盤の間にジョイント要素を挿入する場合等には、通常、ケーソンは線形平面要素でモデル化され、地盤はマルチスプリング要素でモデル化されるため、地盤要素側の有効応力を参照すればよいが、地盤同士の間には挿入する場合にはどちらか一方を選択する必要がある。

ジョイントのせん断応力が降伏せん断応力  $\tau_y$  を超えると滑りが発生するのはいうまでもないが、全体系のレーレー減衰係数がジョイント要素の接線剛性  $K_s$  にかかっている場合、実際は滑るべき力がかかっているのに減衰により滑りが妨げられることがある。そのような場合は、ジョイント要素に個別のレーレー減衰係数を考慮する機能がついているので、減衰を完全にゼロにするか無視できるくらいの小さい減衰に設定することが可能である。ただし、積分時間間隔を通常よりも小さくする等の工夫をしないと計算が不安定になりやすいので注意が必要である。

また、ジョイントの滑りに関しては、降伏せん断応力  $\tau_y$  が接触面法線方向にかかる直応力  $\sigma_n$  に依存するため、自重解析において解が発散する場合がある。このような場合、直応力  $\sigma_n$  の下限値を設ける機能がついているので、それを利用するとよい。ただし、その自重解析に引き続く静的解析または動的解析においては、下限値を外すのを忘れてはならない。さもなければ、本来直応力  $\sigma_n$  がゼロになり剥離しているにも関わらず、滑り抵抗が常に存在していることになり、適切な解が得られない場合がある。

#### 4-7 流体要素と流体-構造連成面要素

##### (1) 動水圧に関する定式化<sup>6)</sup>

流体領域は、非圧縮の波動方程式に支配されるものとし、有限要素法による定式化を行なって付加質量マトリックスを求める。この付加質量マトリックスは、運動方程式における質量マトリックスに含まれるものとする。また、荷重項にも、付加質量マトリックスの寄与が含まれるものとする。

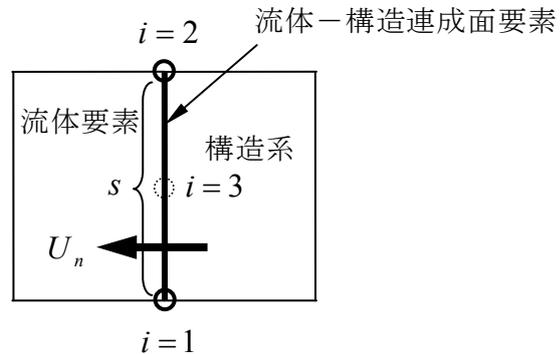


図 4-7-1 流体要素と流体構造連成面要素

圧縮性流体が微小振幅の運動するとき、発生する圧力分布  $p$  の支配方程式は、2次元においては次式で表される。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (4-7-1)$$

ここに、 $\bar{c}$  は音波の速度を表し、粘性による減衰項は省略してある。また、境界が固体で運動している場合は次式で与えられる。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{\partial^2 (U_n)}{\partial t^2} \quad (4-7-2)$$

ここに、 $\rho$  は流体の密度、 $U_n$  は変位の法線方向成分を表す。

この連成問題において、非圧縮性流体 ( $\bar{c} = \infty$ ) を仮定し、流体領域を有限要素に分割すれば、次式に示す離散化方程式が導かれる。

$$G\{p\} + S\{\ddot{u}\} = 0 \quad (4-7-3)$$

ここに、 $G$  は動水圧に関するマトリックス、 $S$  は流体と構造物の境界面に関するマトリックスで次式で表される。

$$S = \int_s H^T \rho \bar{H} ds \quad (4-7-4)$$

ここに、 $H$  は圧力分布を定義する形状関数で、 $\bar{H}$  は構造系の変位ベクトルと境界面の法線方向の変位を関係づける形状関数 (次式参照)、 $s$  は流体と構造物の境界面を表す。

$$\{U_n\} = \bar{H}\{u\} \quad (4-7-5)$$

式 4-7-3 より、境界面における圧力  $\{p\}$  (動水圧) は直接解け、次式の通りになる。

$$\{p\} = -G^{-1}S\{\ddot{u}\} \quad (4-7-6)$$

一方、構造系における有限要素の離散化方程式は次式のように表すことができる。

$$M\{\ddot{u}\} + C\{\dot{u}\} + K\{u\} + \{\bar{f}_s\} + \{r\} = 0 \quad (4-7-7)$$

ここで、外力項は構造系において独立に指定される外力項  $\{r\}$  と境界流体圧力（動水圧）による項  $\{\bar{f}_s\}$  とに分解してある。仮想仕事の原理から、後者は次式で与えられる。

$$\{\bar{f}_s\} = \int_s \bar{H}^T p ds = \frac{1}{\rho} S^T \{p\} \quad (4-7-8)$$

この式に式(4-7-6)を代入すると、次式が得られる。

$$\{\bar{f}_s\} = -\frac{1}{\rho} S^T G^{-1} S \{\ddot{u}\} \quad (4-7-9)$$

したがって、次式に示す質量マトリクスが付加質量マトリクスとして運動方程式に含まれる。

$$-\frac{1}{\rho} S^T G^{-1} S \quad (4-7-10)$$

なお、運動方程式が解かれれば、動水圧は式(4-7-6)より求められる。

## (2) 使用上の注意事項

流体－構造連成面要素は、流体要素と構造系要素の共有節点（図 4-7-1における節点  $i=1\sim 3$ ）を用いて流体と構造の境界面を定義するが、節点の向きは図 4-7-1に示すように  $i=1$  から  $i=2$  に向かう方向に対して左側に流体要素、反対側に構造系の要素を置くように定義する必要がある。また、中間節点（ $i=3$ ）を設定できるが、流体要素および構造系要素の辺に中間節点がなければ必要ない。

例えば、矢板等のはり要素の両側に流体領域がある場合には、同じ矢板節点に対して、その両側から流体－構造連成面要素（および流体要素）を貼り付けることは出来ない。その場合は、ダミーの線形はり要素（無質量・無剛性）を矢板を表すはり要素と同じ位置において、両者の対応する節点の3自由度（ $U_x$ ,  $U_y$ ,  $R_z$ ）をMPCで結合した上で、一方の流体－構造連成面要素（および流体要素）は、ダミーの線形はり要素の方に貼り付ける。

#### 4-8 粘性要素

##### (1) 側方地盤要素 (側方粘性境界要素)

構造系の側面に側方地盤要素を定義すると、側方粘性境界とみなされ、当該境界に次の表面力が付く。

$$\bar{T}_x^* = -\rho V_p (\dot{U}_x^s - \dot{U}_x^f) \quad (4-8-1)$$

$$\bar{T}_y^* = -\rho V_s (\dot{U}_y^s - \dot{U}_y^f) \quad (4-8-2)$$

但し、 $\rho$ 、 $V_s$ 、 $V_p$ は側方無限地盤の密度、s波速度、p波速度を表す。又 $\dot{U}_x^s$ 、 $\dot{U}_y^s$ は構造系側面の(相対)速度、 $\dot{U}_x^f$ 、 $\dot{U}_y^f$ はfree fieldの(相対)速度。

これらの表面力は離散化された運動方程式において次式に示す減衰項と荷重項に付加される。

$$C_s \left( \left\{ \dot{U} \right\}_r - \left\{ \dot{U} \right\}_r^f \right) \quad (4-8-3)$$

但し、

$$C_s = \int_{\text{側面}} H^T \begin{bmatrix} \rho V_p & \\ & \rho V_s \end{bmatrix} H d\Gamma \quad (4-8-4)$$

$\left\{ \dot{U} \right\}_r^f$ はfree fieldの相対節点速度を表す。また、 $C_s \left\{ \dot{U} \right\}_r$ が減衰項に、 $+C_s \left\{ \dot{U} \right\}_r^f$ が荷重項になる。

##### (2) 下方地盤要素 (底面粘性境界要素)

構造系の側面に下方地盤要素を定義すると、底面粘性境界とみなされ、当該境界に次の表面力が付く。

$$\bar{T}_x^* = -\tau_{yx} = -\rho V_s \dot{U}_x^b \quad (4-8-5)$$

$$\bar{T}_y^* = -\sigma_y = -\rho V_p \dot{U}_y^b \quad (4-8-6)$$

但し、 $\rho$ 、 $V_s$ 、 $V_p$ は下方無限地盤の密度、s波速度、p波速度を表す。又、 $\dot{U}_x^b$ 、 $\dot{U}_y^b$ は構造系底面の基盤に対する相対速度である。

下方粘性境界の表面力は、離散化された運動方程式において次式に示す減衰項に付加される。

$$C_b \left\{ \dot{U} \right\}_r \quad (4-8-7)$$

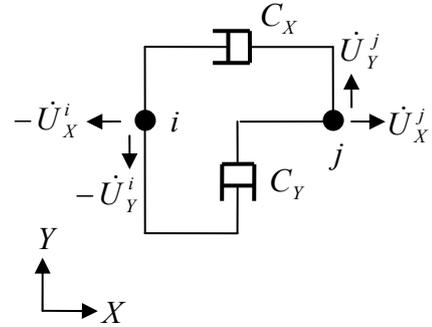
但し、

$$C_b = \int_{\text{底面}} H^T \begin{bmatrix} \rho V_s \\ \rho V_p \end{bmatrix} H d\Gamma \quad (4-8-8)$$

### (3) ダンパー要素

本ダンパー要素は使用実績が殆どないため、使用に当たっては利用者自身で十分な検証を行う必要がある。

ダンパー要素は、**図 4-8-1**に示すように、2節点間の速度差に比例した減衰力を考慮するもので、全体座標系の並進2成分で構成する。



**図 4-8-1** ダンパー要素

2節点間の速度差に比例した減衰力は、次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} F_{CX} \\ F_{CY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_X & \\ & C_Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_X^j - \dot{U}_X^i \\ \dot{U}_Y^j - \dot{U}_Y^i \end{Bmatrix} \quad (4-8-9)$$

ここに、 $C_X$ は水平方向の減衰係数、 $C_Y$ は鉛直方向の減衰係数である。

なお、ダンパー要素に関する節点自由度の並びを

$$\{\dot{U}\}^T = (\dot{U}_X^i \quad \dot{U}_Y^i \quad \dot{U}_X^j \quad \dot{U}_Y^j) \quad (4-8-10)$$

とおくと、各節点における減衰力は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} F_{CX}^i \\ F_{CY}^i \\ F_{CX}^j \\ F_{CY}^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_X & & -C_X & \\ & C_Y & & -C_Y \\ -C_X & & C_X & \\ & -C_Y & & C_Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_X^i \\ \dot{U}_Y^i \\ \dot{U}_X^j \\ \dot{U}_Y^j \end{Bmatrix} \quad (4-8-11)$$

したがって、次式に示す減衰マトリクス  $C_{add}$  が離散化された運動方程式の減衰項に該当する自由度に対して付加される。

$$C_{add} = \begin{bmatrix} C_X & & -C_X & \\ & C_Y & & -C_Y \\ -C_X & & C_X & \\ & -C_Y & & C_Y \end{bmatrix} \quad (4-8-12)$$

#### 4-9 節点集中質量要素

節点集中質量要素は、図 4-9-1に示すように、一つの節点 ( $i$ ) 上に並進 2 成分と回転成分の計 3 成分の質量を定義し、節点にかかる慣性力を考慮する。

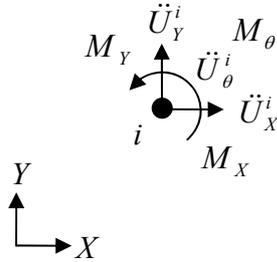


図 4-9-1 節点集中質量要素

節点集中質量要素を定義した節点  $i$  上に生じる慣性力は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} F_{MX}^i \\ F_{MY}^i \\ F_{M\theta}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_X & & \\ & M_Y & \\ & & M_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_X^i \\ \ddot{U}_Y^i \\ \ddot{U}_\theta^i \end{Bmatrix} \quad (4-9-1)$$

ここに、 $M_X$  は水平方向で考慮する質量、 $M_Y$  は鉛直方向で考慮する質量、 $M_\theta$  は回転方向で考慮する質量である。

したがって、次式に示す質量マトリクス  $M_{add}$  が離散化された運動方程式の慣性項に該当する自由度に対して付加される。

$$M_{add} = \begin{bmatrix} M_X & & \\ & M_Y & \\ & & M_\theta \end{bmatrix} \quad (4-9-2)$$

#### 4-10 利用者定義非線形はり要素

はり要素としてモデル化する対象部材には、鋼材、RC部材、SRC部材等様々な種類があるが、それらの部材の非線形性を適切に考慮しようとする、それぞれに対応した特殊な構成則を種々用意しなければならない。そのため、FLIP ver.7.1.6において、利用者が構成則を直接定義できるように利用者定義非線形はり要素が設けられた。

現状では 10 種類まで利用者定義が可能であるが、そのうちの一つに、標準装備としてRC部材の非線形特性の一つである修正武田モデルが組み込まれている。ここでは、以下に、その修正武田モデルの非線形特性について紹介する。

① 骨格曲線は tri-linear である。

② これまでの最大変形点における  $\delta$  を  $\delta_{\max}$  (正側)、 $\delta_{\min}$  (負側) とする。 $\delta$  が線形領域 ( $-\delta_c^- < \delta_{\min}$  かつ  $\delta_c^+ > \delta_{\max}$ ) から初めて  $\delta_c^+$  を超えた、もしくは  $-\delta_c^-$  を下回った場合、反対側の  $\delta_{\max}$ 、あるいは  $\delta_{\min}$  は  $-\delta_c^-$ 、あるいは  $\delta_c^+$  へ遷移する。また  $\delta$  がひび割れ領域 ( $-\delta_y^- < \delta_{\min}$  かつ  $\delta_y^+ > \delta_{\max}$ ) から初めて  $\delta_y^+$  を超えた、もしくは  $-\delta_y^-$  を下回った場合、反対側の  $\delta_{\min}$ 、 $\delta_{\max}$  はそれぞれ  $-\delta_y^-$ 、 $\delta_y^+$  へ遷移する。なお、最大変形点は常に骨格曲線上に存在する。

③ 線形領域から  $\delta$  が初めて  $\delta_c^+$  を超えた、もしくは  $-\delta_c^-$  を下回った場合、またはこれまでの最大変形点  $\delta_{\max}$  を超えた、もしくは  $\delta_{\min}$  を下回った場合は骨格曲線上を進む。線形領域の外側において荷重  $P$  が載荷から除荷へと移行した場合は、戻り点から復元力が 0 になるまで  $K_r^+$ 、あるいは  $K_r^-$  で戻り、 $\delta$  軸上から反対側の今までの最大変形点を目指す。ここで  $K_r^+$ 、 $K_r^-$  はそれぞれ次式によって定義される。

$$K_r^+ = K_c \cdot \left| \frac{\delta_{\max}}{\delta_c^+} \right|^{-\beta^+}, \quad K_r^- = K_c \cdot \left| \frac{\delta_{\min}}{\delta_c^-} \right|^{-\beta^-}$$

ここで  $K_c$ : 第一勾配、 $\beta^+$ : 正側入力係数、 $\beta^-$ : 正側入力係数

デフォルトでは  $\beta^+ = \beta^- = 0.4$

④ 復元力 0 の点から最大変形点に向かう直線上から戻る場合も復元力が 0 になるまでは  $K_r^+$  または  $K_r^-$  で戻り、その後反対側の今までの最大変形点を目指す。

以上のルールを図化したものを図 4-10-1 に示す。

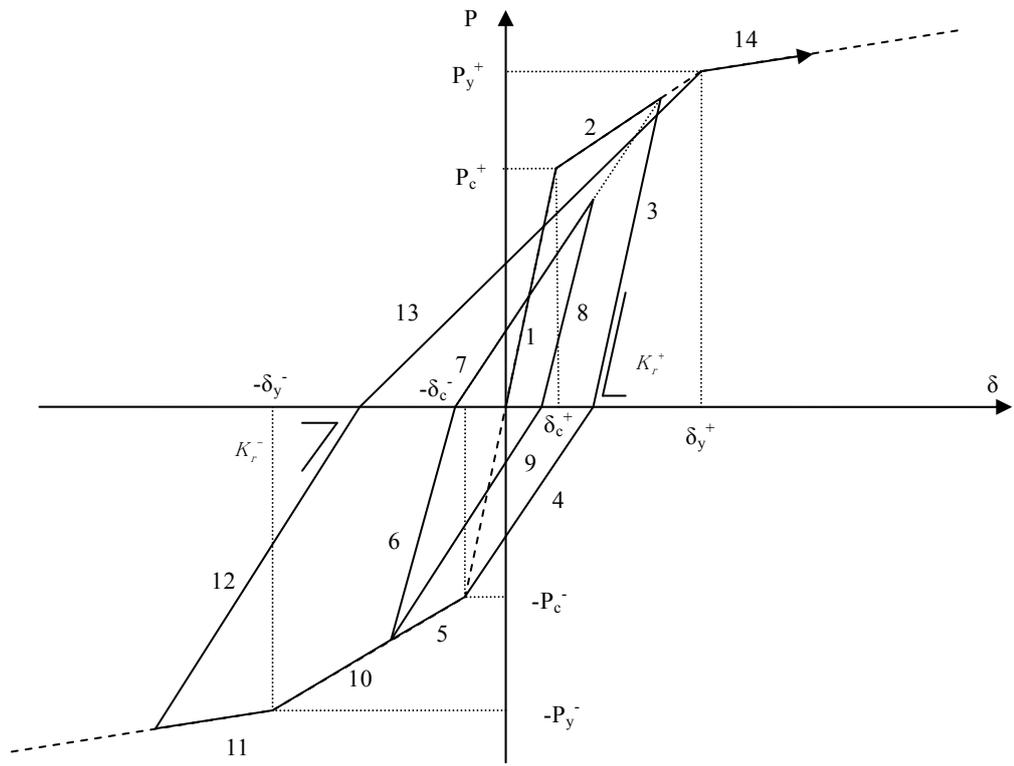


図 4-10-1 修正武田モデル

<4-1~4-10 の参考文献>

- 1) Hinton,E. and Owen,D.R.J., 'Finite Element Programing' ,Academic Press, Ch.4 1977
- 2) Przemieniecki,J.S., 'Theory of Matrix Structural Analysis', McGraw-Hill book Company, New York, 1968,  
(山田嘉昭 川井忠彦訳, 'マトリックス構造解析の基礎理論')
- 3) 鷺津久一郎、宮本博、山田嘉昭、山本善之、川井忠彦、'有限要素法ハンドブック'
- 4) '鋼構造塑性設計指針'、日本建築学会
- 5) Goodman,R.E., 'Methods of Geological Engineering in Discontinuous Rocks' ,West Publishing Company, 1976  
(赤井浩一, 川本眺万, 大西有三訳, '不連続性岩盤の地質工学')
- 6) Zienkiewicz,O.C., 'The Finite Element Method', 3rd Edition, McGraw-Hill Book company, New York, 1977  
(吉識雅夫, 山田嘉昭監訳, 'マトリックス有限要素法' 三訂版)

## 4-11 杭－地盤相互作用ばね要素

### 4-11-1 概要

2次元有限要素法解析により杭基礎を有する構造物の耐震解析を行う場合は、土を表す要素と杭を表す要素、および、上部構造物を表す要素を一つの有限要素モデルに取り込んで、これらを一体として解析する方法がある（以下、一体解析）。杭と周辺地盤との相互作用は、特に地盤が液状化する場合などは、杭間を土がすり抜けるなどの3次元的な挙動が著しい。このような現象を2次元解析で取り扱う場合には、地盤・構造物系の3次元的な挙動を支配する主要因を解明し、これに基づいた適切なモデル化が必要である。

この課題について、以下のような考察に基づいて検討を行い、杭－地盤相互作用ばね要素の提案を行った。前述のように、杭と周辺地盤との相互作用は3次元的な現象である。この現象を、杭間を通る鉛直2次元断面の地盤のみからなる系（以下、杭間地盤断面）の変形挙動に対して杭がある程度の自由度を持ちつつ追随して変形する現象としてモデル化することとした。杭・地盤系の3次元的な現象の主要因をこのようにモデル化することにより、解析の主要部分は2次元解析に還元される。このモデル化においては、杭間地盤断面の2次元変形挙動と、3次元的な土のすりぬけ挙動を介した杭挙動との関係を明らかにすることが、主要な検討課題となる。そのため、杭1本分の水平断面と加振直交方向に隣接する杭との中間地点までの地盤からなる単位厚さの水平断面モデル（杭・地盤系を直上から眺めたモデル）を用いて、杭に水平外力を与えた際に発生する杭の相対変位（杭間地盤断面の変位を表わすと考えた中間地点での地盤変位に対する杭の変位）を解析し、この結果を杭と杭間地盤断面とを結合する地盤ばねの荷重－変位関係としてモデル化することとした。対象としている現象は、地盤の液状化をはじめとする非線形性が著しい現象であるため、地盤ばねの荷重－変位関係は、数値解析的に検討した。

この検討により得られた、荷重－変位関係は、周辺地盤のその時点でのせん断応力－せん断ひずみ関係に、ある変換係数を考慮すれば相似形になることを見出した。そして、その性質を利用して、杭－地盤相互作用ばね要素を構築した。

### 4-11-2 杭－地盤系の3次元的な挙動の分析

#### （1）杭と土の相互作用における3次元効果

直杭式栈橋のように、加振直交方向に杭が繰り返し現れるような構造を考える。このような構造において、一体解析における2次元地盤モデルは、杭間地盤断面の動きを表すものと仮定する。すると、一体解析における2次元地盤モデルと杭モデルを結ぶ杭－地盤相互作用ばねに必要な特性は、杭の杭間地盤断面に対する相対変位とこれを生じさせるために杭に加えた力との間の関係に他ならない。このような、杭荷重－相対変位関係を、各種条件下において数値解析により算定し、それらを総合して、杭－地盤相互作用ばねの特性とした。

地中の深い位置における相互作用を考える場合、すなわち、上下方向への土の移動を考慮しなくてもよい場合は、杭と土の相互作用における3次元効果は、平面ひずみを対象とする2次元解析プログラムの解析面を水平面に一致させて、杭の断面と土をモデル化し、土と杭の間に相対変位を生じさせる解析により評価することが可能である。すなわち、このような検討から、一体解析における適切な杭-地盤相互作用ばねの特性を導くことが出来る<sup>1)</sup>。

一方、浅い位置における相互作用では、地表面の影響により、土の上下方向の動きを伴う杭前面地盤での土塊滑りが生じるので、この効果を表すために、何らかの工夫が必要であるかも知れない。あるいは、杭前面地盤の土塊滑りは、一体解析の地盤部分を表す有限要素の挙動により自動的に考慮される可能性もあるので上述のよう補正は必要ないかも知れない。ここでは、上下方向への土の移動を考慮しなくてもよい場合を対象に検討を行う。

## (2) 杭荷重-相対変位関係

### (a) 杭荷重-相対変位関係を調べるための解析モデル

前述の杭荷重-相対変位関係を調べるための解析モデルの考え方を図 4-11-1に示す。同図の a) は、加振方向に直交する方向に一定間隔で並んだ杭の列を表すが、このような杭配置を検討対象とする。同図の b) は、杭列から1本の杭と隣接する杭との中間地点までの地盤を取り出し、中間地点で循環境界条件を与えたモデルである。このモデルに対して、深度相当の拘束圧を与え、さらに、地下水面下の砂層では所定の液状化状態にして、杭を加振方向に単調載荷するか、あるいは、杭を加振方向に繰り返し押し引きして、杭に作用させた力と杭の杭間地盤に対する相対変位の関係を求めた。相対変位の基準点は循環境界条件を課した隣接する杭との中間地点とする（以下、この相対変位を循環境界基準の相対変位と呼ぶ）。なお、加振方向に並んだ杭の列に関する杭間の相互作用については、一体解析の地盤部分を表す有限要素を通じて相互作用が自動的に考慮される可能性もある。なお、ここでは、加振方向には単杭である場合を対象に検討を行った。

解析手順を図 4-11-2に示す。まず、土を深度に応じた拘束圧で、完全排水条件下で等方圧密する（同図 a）。杭の部分は、コンクリート相当の剛性を有する線形平面要素と土要素を貼り合わせておき、圧密解析時は、線形平面要素の剛性は0としておく。すると、土は均等に圧密される。その結果を引き継いで、液状化を考慮しない場合は、杭を表す線形平面要素を生かして、その中心に水平方向の力を加える（同図 b）。液状化を考慮する場合は、杭に載荷する前に、地盤を所定の液状化状態にする。

### (b) 杭荷重-相対変位関係の算定ケース

上述の方針に従い、杭径  $D$  を  $1\text{m}$ 、加振直交方向の杭間距離  $S$  を  $2.5D$ ,  $5D$ ,  $10D$  の3通りとし、図 4-11-3に示す有限要素モデルを作成し、圧密解析と杭への水平載荷解析を行った。なお、地盤は、FLIPのマルチスプリング要素でモデル化した。検討対象とした土質および土の状態の一覧を表 4-11-1に示す。これらの各土質に応じて設定した解析地盤定数を表

4-11-2と表 4-11-3に示す。

この解析モデルにより、静的単調載荷解析および静的繰り返し載荷解析を行った。単調載荷を行う際には、過剰間隙水圧モデルは適用せず、多重せん断ばねモデル<sup>3)</sup>のみを適用した。従って、ダイレタンシーの効果は考慮に入れていない。繰り返し載荷の場合は、地下水水面以下の砂質土に対しては、過剰間隙水圧モデル<sup>4)</sup>を適用してダイレタンシーの効果を検討に入れた。この場合、地盤を所定の液状化状態にするために、液状化フロントパラメータ  $S_0$  を 1.0, 0.5, 0.05 または 0.005 に固定した。これらは、せん断応力が作用していない状態では、過剰間隙水圧比にして、それぞれ、0%, 50%, 95%, 99.5%に相当する。また、粘性土や地下水水面以上の土に対しては、過剰間隙水圧モデルは適用せず、多重せん断ばねモデルのみを適用した。繰り返し載荷の場合は、各ケースについて荷重片振幅を 4 通りに変えた。与えた荷重片振幅の大きさは、ケースにより異なる。

### (c) 杭荷重－相対変位関係の算定例

杭荷重－相対変位関係の算定例として、等価 N 値（有効上載圧 65kPa に換算した N 値）が 10 で、初期有効拘束圧  $\sigma_{m0}'$  が 98kPa の飽和砂に対する単調載荷解析と繰り返し載荷解析の結果を示す。繰り返し載荷の場合は、液状化フロントパラメータ  $S_0$  を 0.05（過剰間隙水圧比 95%相当）に保ったまま行った解析の結果である。

図 4-11-4には、単調載荷解析結果である杭荷重－相対変位曲線と、単調載荷解析の途中のいくつかの荷重レベルに応じた杭心－循環境界間の絶対変位分布を各杭間隔に対して示す。また、杭間隔 5D の場合の単調載荷解析で、荷重レベルが 600kN 時の変形図と変位ベクトル図を図 4-11-5に示す。これらの図によれば、以下のことが分かる。

- ① 杭荷重－相対変位曲線の相対変位は、循環境界基準の杭心の変位であるが、5D と 10D の場合には、中間点（杭心と循環境界の中間点）を基準とした相対変位も表示した。両グラフにはほとんど差が見られない。
- ② 杭荷重－相対変位曲線によれば、負担できる荷重の明瞭な上限値（以下、破綻荷重）が存在する。杭間隔が 2.5D よりは 5D の方が大きい、5D と 10D の間には差が無い。
- ③ 杭心－循環境界間の絶対変位分布図によれば、特に、荷重が大きくなると、杭の動きと杭から循環境界へかけての土の動きは、明らかに逆向きになる。すなわち、杭の前方から後方へ向かう回り込み運動が見られる。これは、600kN 載荷時の変位ベクトル図でも確認できる。
- ④ 杭心－循環境界間の絶対変位分布図によれば、杭の壁から 1.0m～1.5m (1.0D～1.5D) 以上離れると、土の動きは、場所によりあまり変化しなくなる。杭間隔 2.5D の場合は、循環境界は、杭壁から 0.75D のところにあるので、変化しない領域は存在しないが、5D と 10D の場合は、フラットな領域が広がっている。少なくとも、5D と 10D

に関しては，2次元一体解析の地盤モデルの挙動が，循環境界付近の土の挙動を代表すると仮定したことは，首肯されると思われる。

次に図 4-11-6には，繰り返し載荷結果である杭荷重－相対変位曲線を示す。この図によれば，以下のことが分かる。

- ① 杭荷重－相対変位曲線の相対変位は，循環境界基準の杭心の変位であるが，5Dと10Dの場合には，中間点（杭心と循環境界の中間点）を基準とした相対変位も表示した。両グラフには若干の差があるが，当面の検討では，循環境界基準の曲線を用いる。
- ② どの荷重レベルでも，相対変位は  $2.5D < 5D < 10D$  の順に大きい。
- ③ 液状化により過剰間隙水圧が上昇した状態では，相対変位が大きくなるとサイクリックモビリティ現象に特有な現象により，繰り返し載荷の各サイクルにおいて，載荷ピーク点に近づく過程で剛性が回復する局面がある。

#### (d) 杭径が 1m 以外の場合

杭間隔 5D で，等価 N 値 10 の飽和砂 ( $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ ，過剰間隙水圧モデル適用せず) について，杭径 D が 1.0m と 0.5m の場合の解析モデルを作成し，単調載荷解析を行った。D=0.5m の解析モデルは，D=1.0m の解析モデルの全節点座標 (x, y 座標) に 0.5 を乗じて作成した。

破綻荷重は，D=1.0m の場合が 790kN であるのに対して，D=0.5m では，約半分の 394kN であった。また，図 4-11-7には，D=0.5m と 1.0m の場合について，いくつかの荷重段階における，杭心－循環境界の絶対変位分布を示す。D=1.0m の場合は，荷重が 200kN, 400kN, 600kN, 700kN の時の分布を，D=0.5m の場合は，その半分の 100kN, 200kN, 300kN, 350kN の時の分布を，それぞれ示す。

上記と同じ土の条件で，ただ， $S_0$  のみ 0.05（過剰間隙水圧比 95%相当）に変更して，杭径 D=0.5m と 1.0m の場合の解析モデルに対して，それぞれ，繰り返し載荷解析を行った。D=1.0m の解析モデルでは，荷重片振幅を 200kN, 400kN, 600kN, 700kN とし，D=0.5m の場合は，その半分の 100kN, 200kN, 300kN, 350kN とした。得られた，杭荷重－相対変位（循環境界基準）関係を図 4-11-8に示す。

これらの図などから分かることをまとめると，以下のようになる。

- ① 杭径が 1.0m から 0.5m になると，単調載荷時の破綻荷重は約半分になる。すなわち，杭間隔比や土質などその他の条件が同じなら，破綻荷重は杭径に比例する。
- ② 杭径 1.0m の場合の，繰り返し載荷時の杭荷重－相対変位関係と，杭径 0.5m の場合の荷重片振幅をその半分にした時の関係とは，相似である。この場合，相対変位も，半分になる。すなわち，荷重－相対変位関係の荷重軸，相対変位軸を杭径 D で正規

化することにより，杭径に依存しない正規化荷重－相対変位関係が得られる。

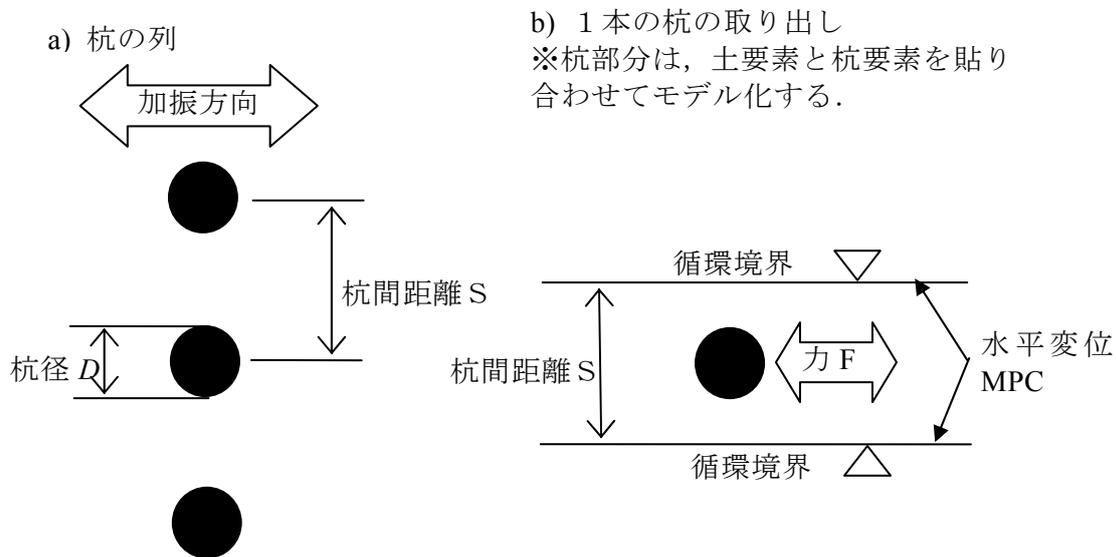
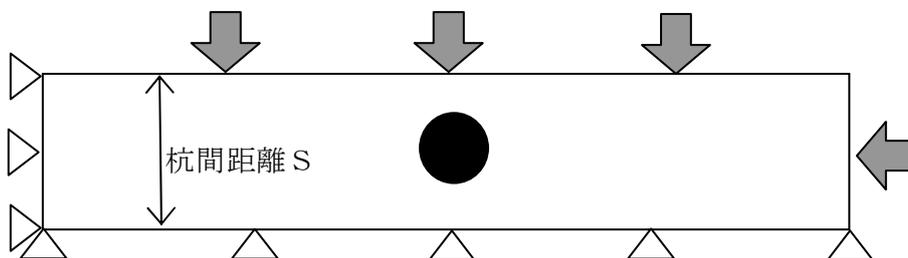


図 4-11-1 杭荷重－相対変位関係を調べるための水平断面モデル<sup>1)</sup>

a) 等方圧密

※ 杭部分は，土要素のみを生かして，一様地盤とする。



b) 水平載荷

※ 杭部分は，杭要素を復活して，十分固い剛性を持たせる。

※ 飽和砂の場合は，まず所定の液状化状態にしてから水平載荷する。

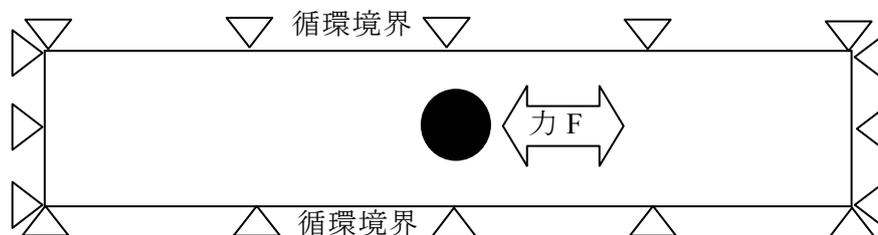
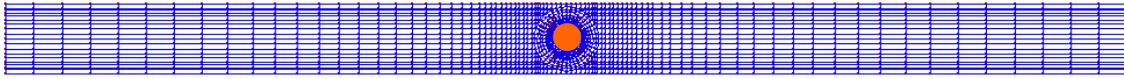


図 4-11-2 杭荷重－相対変位関係を調べるための解析手順

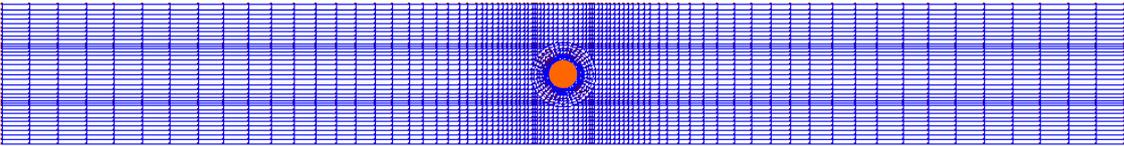
a) 杭間隔 2.5D

スケール  $0$   $5$  (m)



b) 杭間隔 5D

スケール  $0$   $5$  (m)



c) 杭間隔 10D (1/2 対称モデル)

スケール  $0$   $5$  (m)

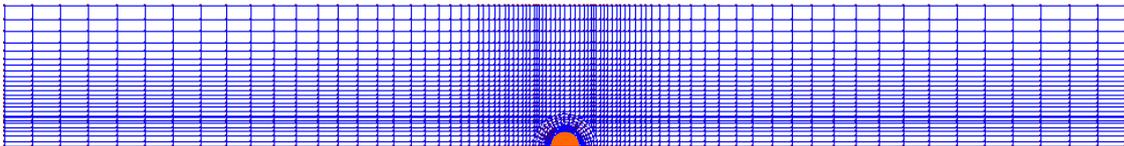


図 4-11-3 検討に使用した有限要素モデル

表 4-11-1 検討対象とする土質および土の状態の一覧<sup>1)</sup>

間隙水	土質	地盤物性		初期有効拘束圧 $\sigma_{m0}'$	過剰間隙水圧比
		等価 N 値 ( $N_{65}$ )	せん断剛性および せん断強度	(kPa)	(%)
地下水以浅 (不飽和状態)	砂	10 相当	等価 N 値より設定	24.5	—
	正規圧密粘土	—	排水正規圧密強度 $\phi_f=30^\circ$	24.5	—
地下水以下 (飽和状態)	砂	10 相当	等価 N 値より設定	24.5	0, 50, 95, 99.5
				98.0	0, 50, 95, 99.5
				196.0	0, 50, 95, 99.5
		15 相当	等価 N 値より設定	24.5	0, 50, 95, 99.5
				98.0	0, 50, 95, 99.5
				196.0	0, 50, 95, 99.5
	20 相当	等価 N 値より設定	24.5	0, 50, 95, 99.5	
			98.0	0, 50, 95, 99.5	
			196.0	0, 50, 95, 99.5	
	正規圧密粘土	—	排水正規圧密強度 $\phi_f=30^\circ$	24.5	—
				98.0	—
				196.0	—
過圧密粘土	—	粘着力 c (小)	196.0	—	
			粘着力 c (中)	196.0	—
			粘着力 c (大)	196.0	—

※1 等価 N 値 ( $N_{65}$ ) は、有効上載圧が 65kPa の場合に換算した N 値。

※2 初期有効拘束圧 ( $\sigma_{m0}'$ ) は、土の想定深度に応じて設定したもので、圧密解析では、この欄で指定の拘束圧で地盤を等方圧密した。

※3 地下水位以下の砂地盤の場合、等方圧密後、過剰間隙水圧比欄が 0%, 50%, 95%, 99.5% に応じて液状化フロントパラメータ  $S_0$  をそれぞれ 1.0, 0.5, 0.05, 0.005 に設定し、過剰間隙水圧を所定の値まで上昇させ、その分、有効応力を減じた。この状態から始めて、 $S_0$  の値を保ったまま、杭への水平載荷解析を行った。

表 4-11-2 多重せん断ばねモデルなどのパラメータ

土層名	等価 N 値  (N <sub>65</sub> )	粘性土 区分	湿潤 密度  $\rho_t$ (t/m <sup>3</sup> )	間隙 率  $n$	変形特性							
					初期 せん断 剛性	体積 弾性 係数	基準化 拘束圧	ポアソン 比	拘束圧 依存 係数	内部 摩擦 角	粘着 力	履歴 減衰 上限値
					$G_{ma}$ (kPa)	$K_{ma}$ (kPa)	$\sigma_{ma}'$ (kPa)	$\nu$	$m$	$\phi_f$ (°)	$c$ (kPa)	$h_{max}$
砂質土	10	—	2.00	0.45	84490	220300	98.0	0.33	0.50	39.7	0.0	0.24
	15	—	2.00	0.45	109000	284500	98.0	0.33	0.50	40.6	0.0	0.24
	20	—	2.00	0.45	131000	342400	98.0	0.33	0.50	41.4	0.0	0.24
正規圧密 粘土	—	拘束圧小	1.60	0.60	4170	10860	24.5	0.33	0.50	30.0	0.0	0.20
	—	拘束圧中	1.60	0.60	16700	43450	98.0	0.33	0.50	30.0	0.0	0.20
	—	拘束圧大	1.60	0.60	33300	86890	196.0	0.33	0.50	30.0	0.0	0.20
過圧密 粘土	—	c : 小	1.60	0.60	33300	86890	196.0	0.33	0.50	0.0	98.0	0.20
	—	c : 中	1.60	0.60	66600	173800	196.0	0.33	0.50	0.0	196.0	0.20
	—	c : 大	1.60	0.60	100000	260700	196.0	0.33	0.50	0.0	294.0	0.20

※1 任意の平均有効応力  $\sigma_m'$  に対する初期せん断剛性  $G_0$  および体積弾性係数  $K_0$  は次式により評価される。

$$G_0 = G_{ma} (\sigma_m' / \sigma_{ma}')^m \quad K_0 = K_{ma} (\sigma_m' / \sigma_{ma}')^m$$

※2 上記パラメータは森田ら (1997) の方法<sup>2)</sup>により設定した。

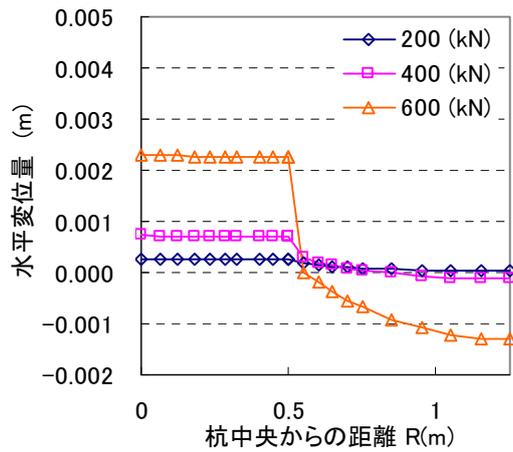
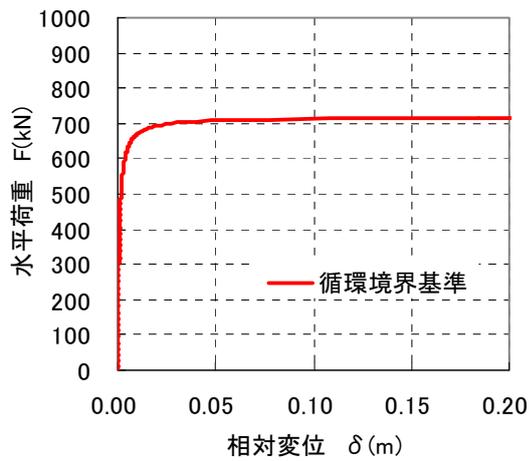
表 4-11-3 過剰間隙水圧モデルのパラメータ

土層名	等価 N 値  (N <sub>65</sub> )	液状化特性					
		変相角 $\phi_p$ (°)	液状化パラメータ				
			$w_1$	$p_1$	$p_2$	$c_1$	$S_1$
砂質土	10	28.0	3.76	0.50	1.01	1.60	0.005
	15	28.0	9.23	0.50	0.91	1.30	0.005
	20	28.0	22.67	0.50	0.81	1.00	0.005

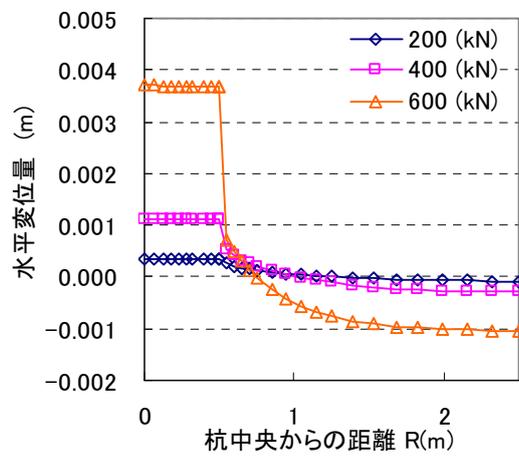
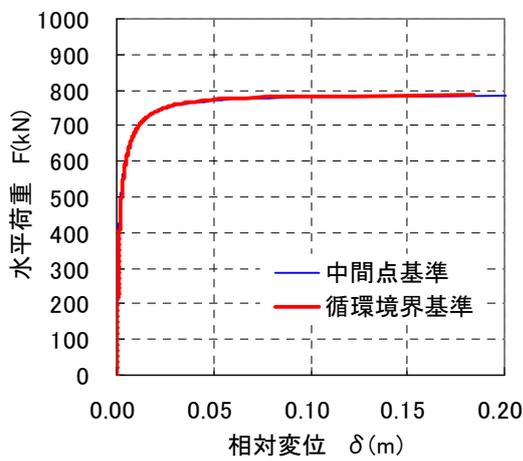
※1 上記パラメータは、森田ら (1997) の方法<sup>2)</sup>により設定した。その際、細粒分含有率は 0% とした。

※2 液状化フロントパラメータ  $S_0$  を所定の値に固定するので、解析では液状化パラメータは参照されない。

a) 杭間隔 2.5D



b) 杭間隔 5D



c) 杭間隔 10D

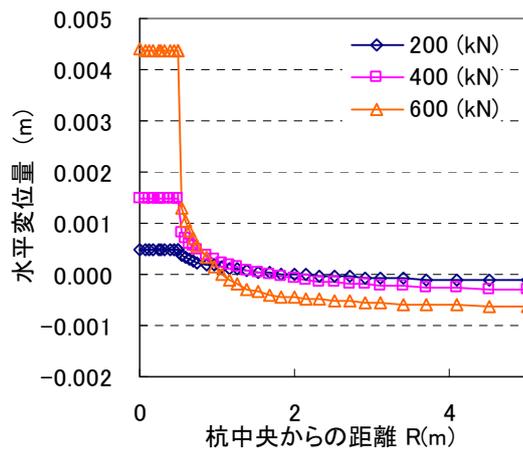
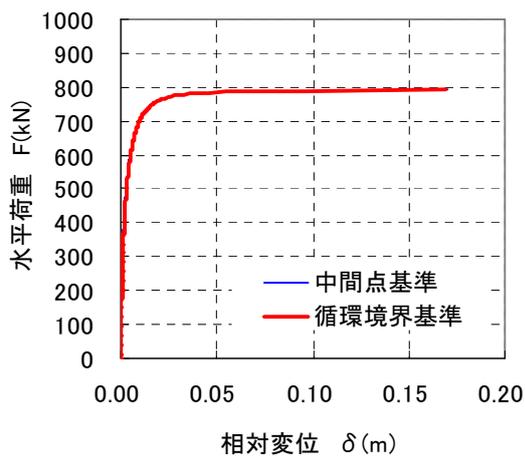
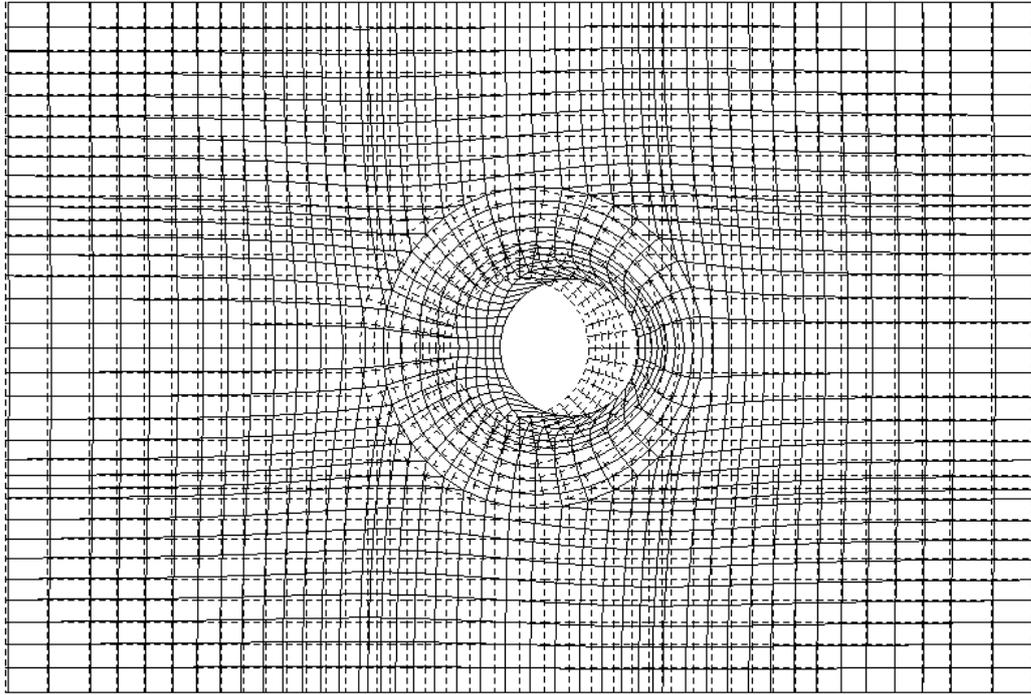


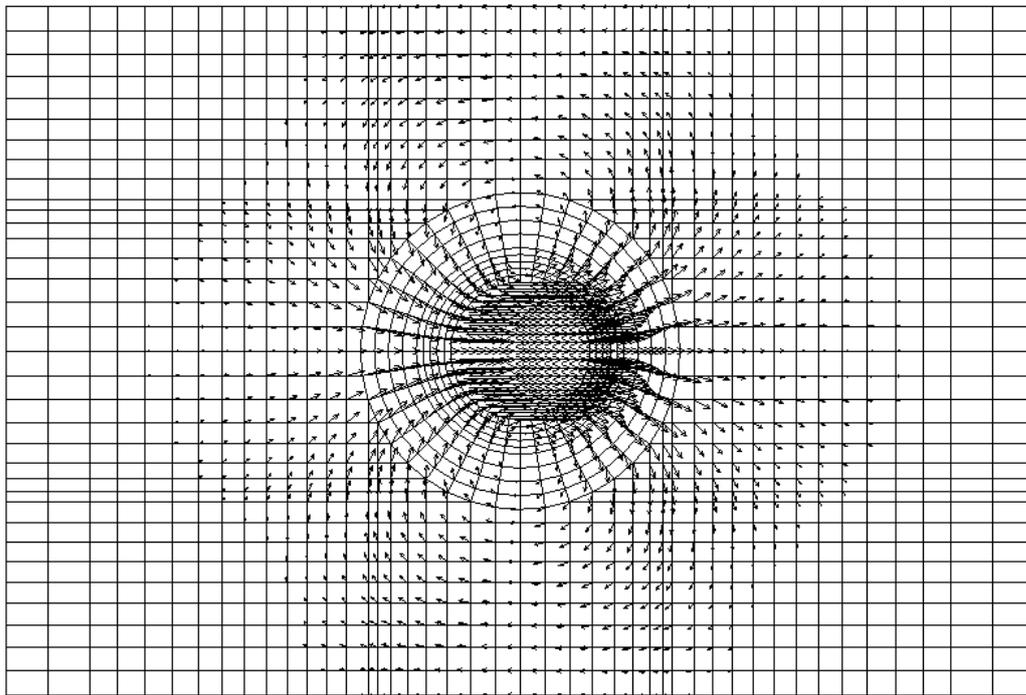
図 4-11-4 単調載荷解析結果（飽和砂， $N_{65}=10$ ， $\sigma'_{m0}=98\text{kPa}$ ，過剰間隙水圧モデル OFF）：  
杭荷重－相対変位曲線（左列）と荷重レベル別の杭中央から循環境界までの絶対変位分布

※ 中間点は杭心と循環境界のちょうど中間の点

scale (m) 0. 1.0  
UNIT SCALE → 0.0020 m



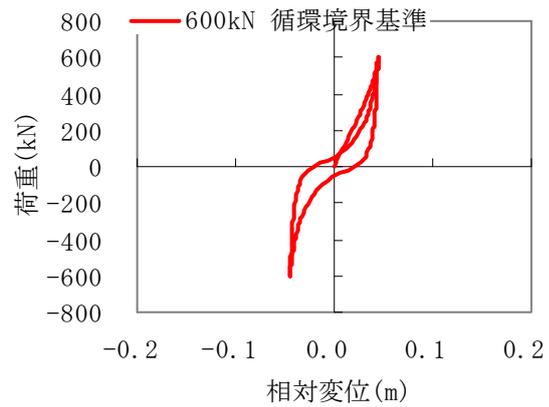
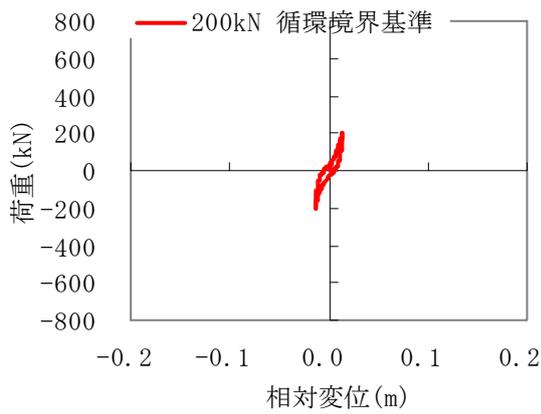
a) 600kN 載荷時の変形図 (変位は 100 倍に拡大)



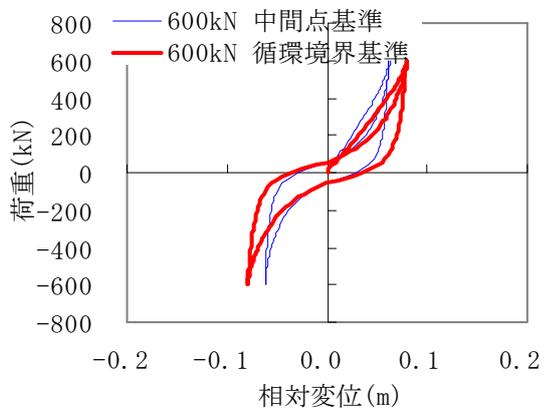
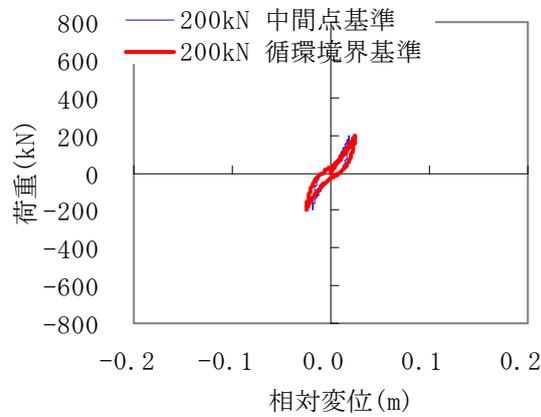
b) 600kN 載荷時の変位ベクトル図 (変位は 100 倍に拡大)

図 4-11-5 単調載荷解析結果 (5D, 飽和砂,  $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ , 過剰間隙水圧モデル OFF) :  
600kN 載荷時の変形図 (上段) と変位ベクトル図 (下段)

a) 杭間隔 2.5D



b) 杭間隔 5D



c) 杭間隔 10D

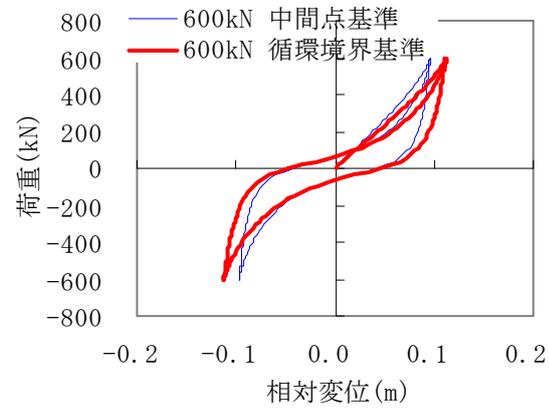
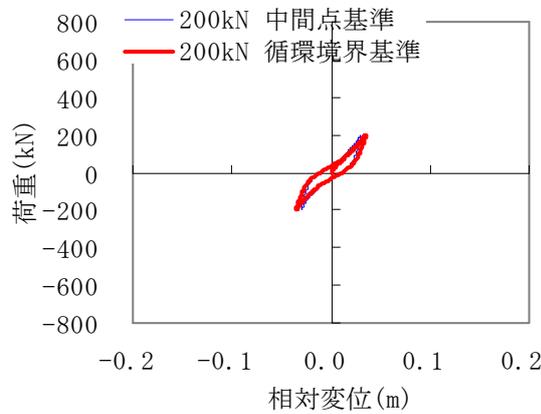


図 4-11-6 繰り返し載荷解析結果 (飽和砂,  $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ ,  $S_0=0.05$ ) :

荷重片振幅 200kN の場合 (左列) と, 荷重片振幅 600kN の場合 (右列) の

水平杭荷重-相対変位曲線 (循環境界基準と中間点基準)

※中間点は, 杭心と循環境界とのちょうど中間の点

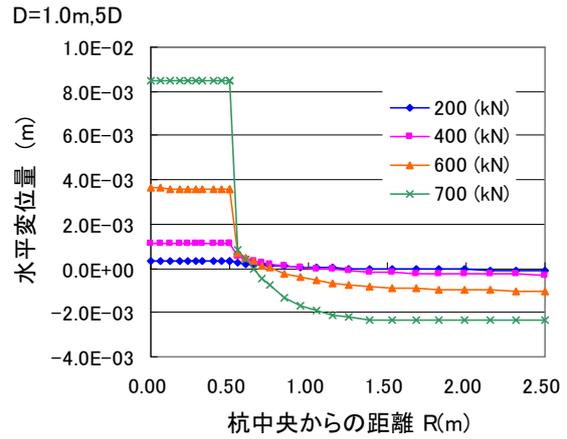
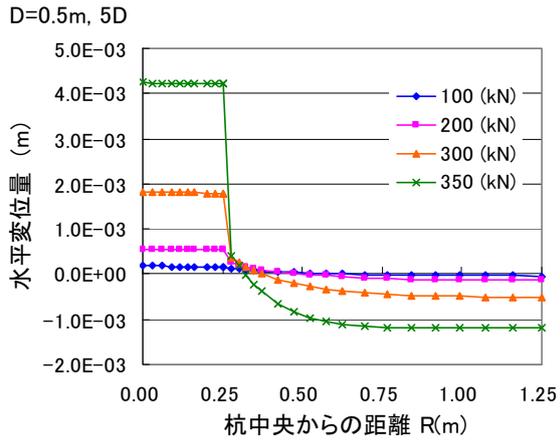


図 4-11-7 飽和砂 (5D,  $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ , 過剰間隙水圧モデル OFF) :  
杭径が 0.5m (左側) と 1.0m (右側) の場合の単調載荷時の絶対変位分布

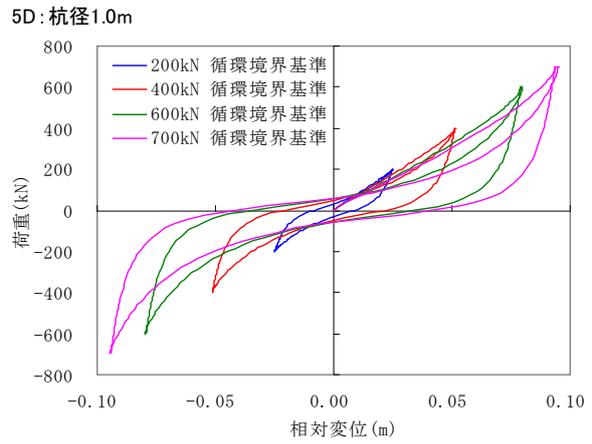
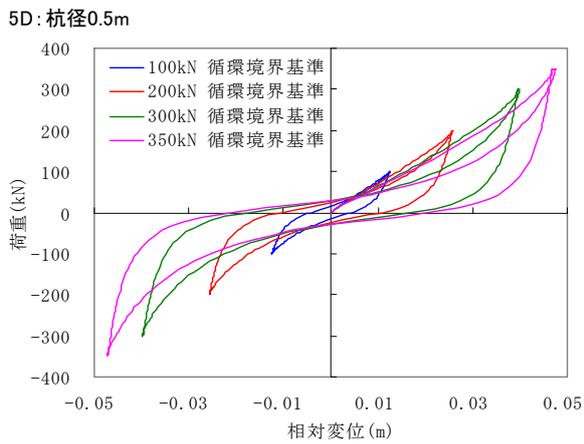


図 4-11-8 飽和砂 (5D,  $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ ,  $S_0=0.05$ ) :  
杭径が 0.5m (左側) と 1.0m (右側) の場合の繰り返し載荷時の杭荷重-相対変位曲線

#### 4-11-2 杭－地盤相互作用ばねによる3次元の挙動のモデル化

杭・上部構造物と地盤を一つの2次元有限要素モデルに組み込んで耐震解析を行う、いわゆる一体解析を行う際、杭－地盤相互作用における3次元効果を考慮するために、杭と地盤を切り離し、その間を非線形ばねで結ぶ方法を採用した。そのばね特性を定めるために、平面ひずみプログラムの解析面を水平面に一致させて、杭の断面（円形断面）とその周辺の土をモデル化し、土と杭の間に相対変位を生じさせる解析を、各種条件下で実施したことは既に述べた。ここでは、その結果である杭荷重－相対変位関係を参照して、杭－地盤系の一体解析において必要となる杭－地盤相互作用ばねを提案する。

##### (1) ばねの静的特性とばね値算定法

まず、杭径1m、長さ1mの杭に対する静的水平載荷解析により得られた杭荷重－相対変位特性を整理して、杭－地盤相互作用ばねの静的な特性の算定法を組み立てる。次にこれを任意の杭径と杭長の場合に拡張する<sup>5)</sup>。

##### (a) 破綻荷重

土要素に対して過剰間隙水圧モデルを適用しない場合、従ってダイラタンシーの影響を考慮しない場合は、杭に対する単調載荷解析において荷重を次第に増加させて行くと、それ以上の荷重を負担出来ないという荷重レベルの上限値（以下、破綻荷重）が存在する（図4-11-4参照）。破綻荷重を、杭周辺の土の初期せん断強度で正規化した値は、特徴的な傾向を示す（図4-11-9参照）。

すなわち、不飽和土を除き、正規化した破綻荷重は、杭間隔が2.5Dでは11.5のごく近傍に、5Dと10Dでは12.6のごく近傍に集中する（この量は、後述するように無次元量である）。なお、不飽和土の場合も、破綻荷重として、解析結果とは若干異なるが、初期せん断強度の11.5倍か12.6倍の値を採用する。ダイラタンシーの影響を考慮する場合は、土に大きなせん断力が作用すると、正のダイラタンシーの影響で、明瞭な破綻荷重は認められないが、ここでは、同様に、初期せん断強度 $\tau_{m0}$ の11.5倍～12.6倍として算定することにする（これらについては、特に、根拠がある訳では無いが、このようにすると、後の整理において都合がよい）。

従って、どのような条件下の土についても、杭－地盤からなる全体系を解くまでも無く、"破綻荷重"を、初期せん断強度 $\tau_{m0}$ の11.5倍～12.6倍として算定することが可能である。

$$\text{破綻荷重} = (11.5 \sim 12.6) \times \text{初期せん断強度 } \tau_{m0} \quad (4-11-1)$$

##### (b) 杭荷重－相対変位関係と応力－ひずみ関係

図4-11-11には、不飽和砂 ( $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=24.5\text{kPa}$ ) の場合について、杭への繰り返し載荷解析結果である杭荷重－相対変位（循環境界基準）関係を、各杭間隔（2.5D, 5D, 10D）

について示す。また、同図には、図 4-11-10に示すように、同じ条件の土の 1 要素を取り出して、等方圧密後に繰り返しせん断解析を行った場合の、せん断応力  $\tau_{xy}$ —せん断ひずみ  $\gamma_{xy}$  関係を示す。この 1 要素の解析（以下、要素シミュレーション）のせん断応力振幅は、5D の場合の荷重片振幅から次式で算定した値を用いた。

$$\text{せん断応力片振幅} = (\text{荷重片振幅} / \text{破綻荷重}) \times \text{初期せん断強度 } \tau_{m0} \quad (4-11-2)$$

$$= \text{荷重片振幅} / 12.6 \quad (4-11-3)$$

同様に、図 4-11-12～図 4-11-15には、飽和砂 ( $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ , 過剰間隙水圧モデル適用) の場合の図を示す。図 4-11-12, 図 4-11-13, 図 4-11-14, 図 4-11-15は、それぞれ、液状化フロントパラメータ  $S_0$  が 1.0, 0.5, 0.05, 0.005 の場合に対応する。この時の、せん断応力片振幅としては、やはり、5D の場合の荷重片振幅を参照して、(4-11-3) 式により算定した。さらに、図 4-11-16には、飽和正規圧密粘土 ( $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ ) について、同様の図を示す。

これらの図に示したように、5D の場合の杭荷重—相対変位関係と、対応する要素シミュレーション結果である応力—ひずみ関係は、相対変位軸とひずみ軸のスケールを調整すれば相似にすることができる。相似になるためのひずみと相対変位の変換関係があらかじめ分かれば、杭—地盤からなる全体系を解くまでもなく、杭近傍の土の構成則に基づいて描いた応力—ひずみ関係から杭荷重—相対変位関係を求めることができる。この場合、応力は、(5-4-3) 式と同様の次式により、荷重に変換することができる。

$$\text{荷重} = \alpha_p \times \text{せん断応力} \quad (4-11-4)$$

ここに、 $\alpha_p$  は応力—荷重変換係数で、杭間隔と図 4-11-9より定まる 11.5～12.6 の範囲の値である。また、ひずみと相対変位の変換関係は次項で取り上げる。

図 4-11-13～図 4-11-15においては、初期載荷時の杭荷重—相対変位関係が、荷重片振幅のレベルにより異なる。すなわち、荷重片振幅が大きいほど、同一荷重で変位が出やすくなる。これは、どのケースでも、1 荷重サイクルを 200 ステップに分割して解析を実施したために、荷重片振幅が大きいと、1 ステップの荷重増分が増えて、精度が落ちるためである。応力—ひずみ関係の計算でも、一律に、1 サイクル 200 分割としたために、同様の誤差が生じている。図 4-11-17には、飽和砂 ( $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ ,  $S_0=0.05$ ) に対する要素シミュレーション結果を示す。左図が、1 サイクル当たり 200 荷重ステップに分割した場合の応力—ひずみ関係であり、右図が 2000 ステップとした場合の応力—ひずみ関係である。左図は、図 4-11-14に示した要素シミュレーションによる応力—ひずみ関係の再掲である。この図によれば、荷重分割を細かくすると、初期載荷の経路は、応力レベルによら

ず  
に  
重  
な  
る  
こ  
と  
が  
分  
か  
る  
が  
、  
全  
体  
的  
に  
は  
概  
ね  
同  
じ  
傾  
向  
を  
示  
す  
。

単調載荷 全17ケース×杭間隔3ケース 破綻荷重／初期せん断強度  $\tau_{m0}$

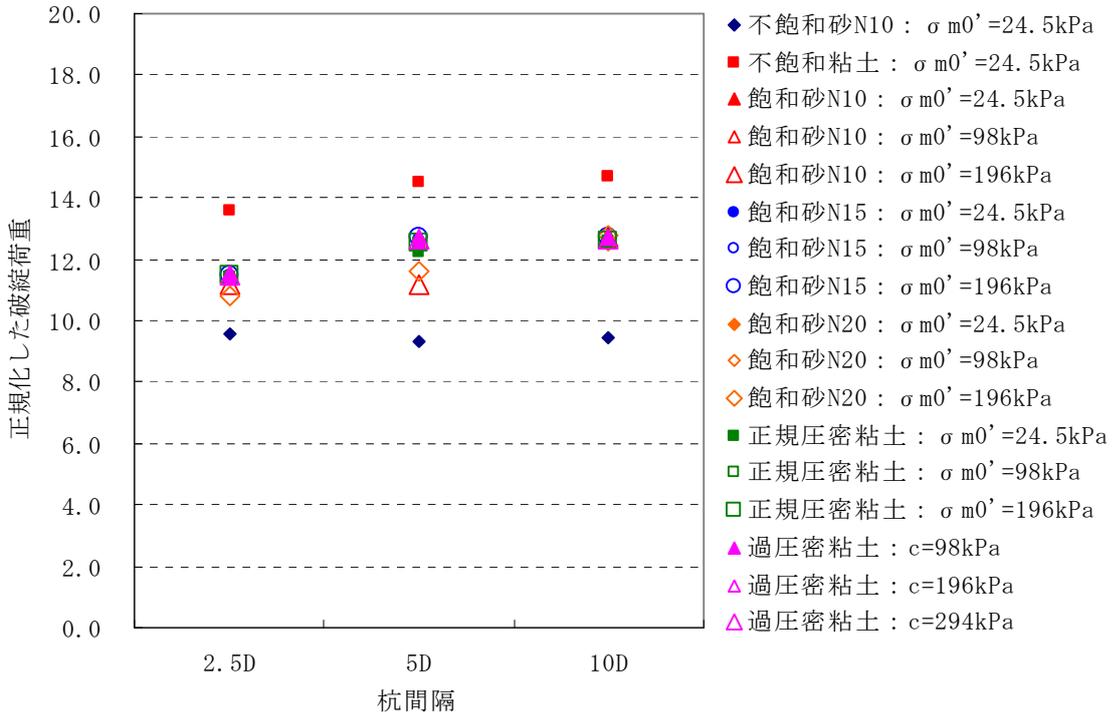


図 4-11-9 単調載荷時の（破綻荷重／初期せん断強度  $\tau_{m0}$ ）の分布

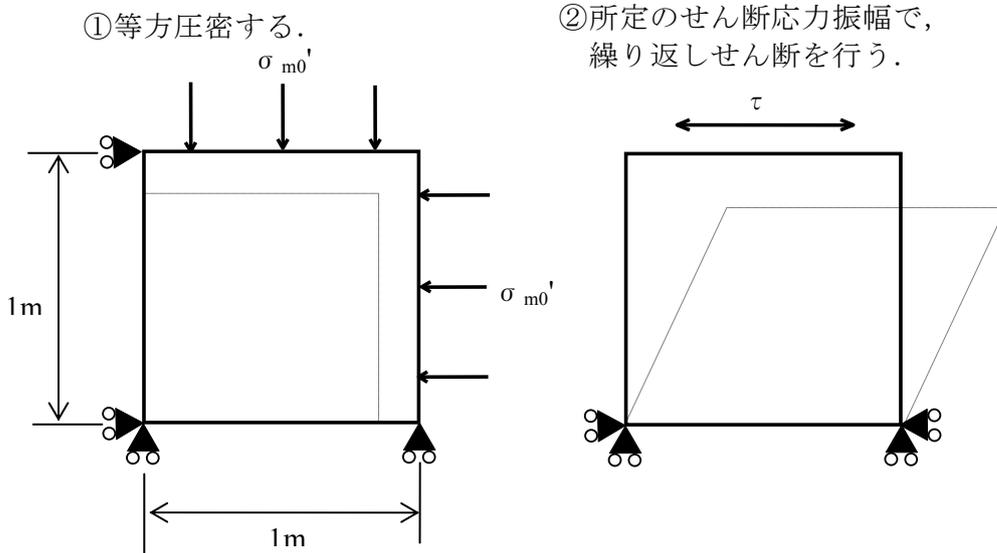


図 4-11-10 要素シミュレーション

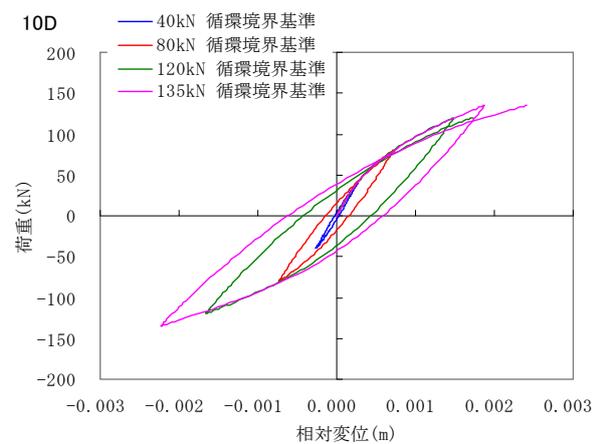
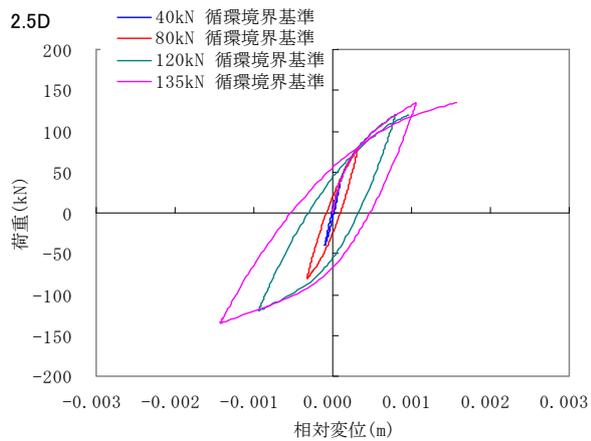
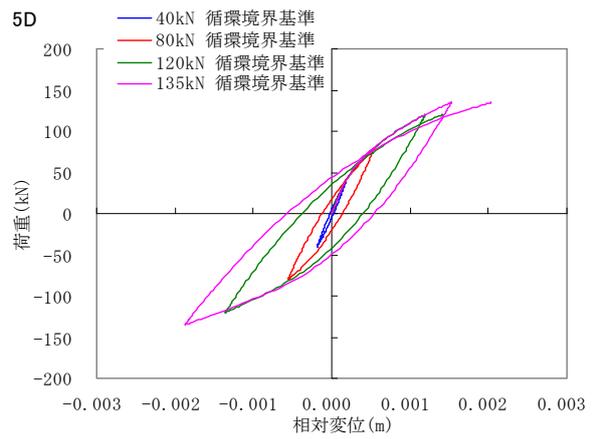
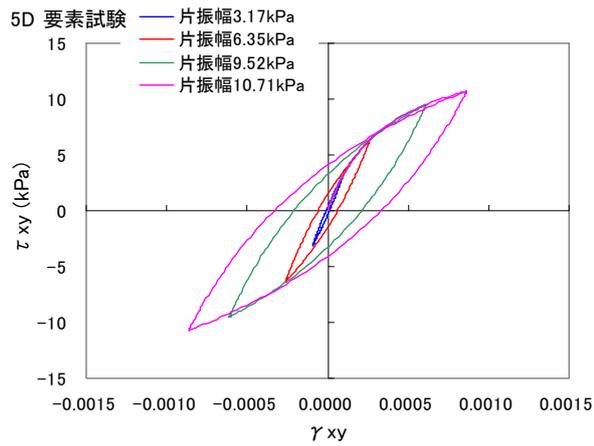
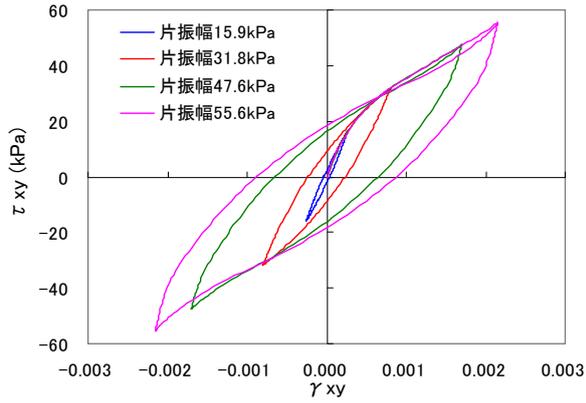
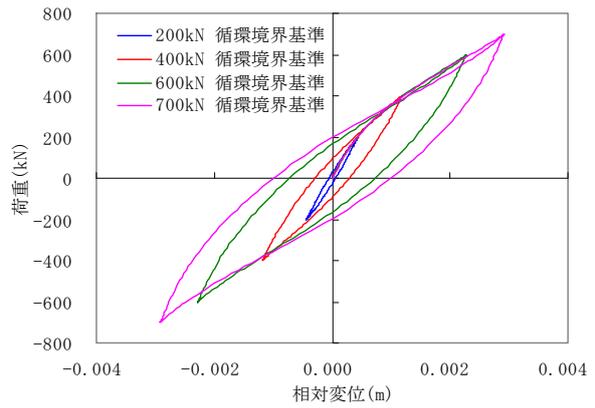


図 4-11-11 不飽和砂 ( $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=24.5\text{kPa}$ ,) を対象とした, 水平断面モデルを用いた  
 繰り返し載荷解析による杭荷重-相対変位曲線 (2.5D, 5D, 10D: 循環境界基準) と  
 5D の繰り返し載荷解析に対応する要素シミュレーションの応力-ひずみ関係 (左上の図)

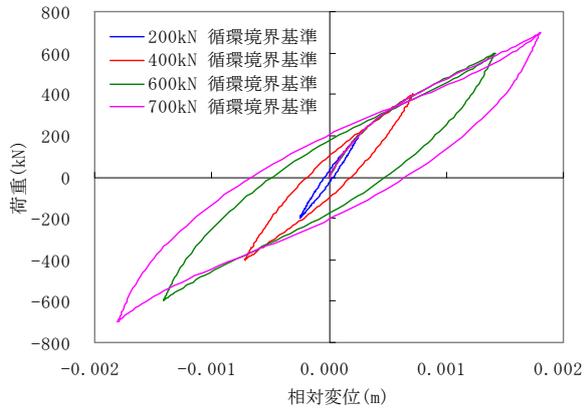
5D要素試験



5D



2.5D



10D

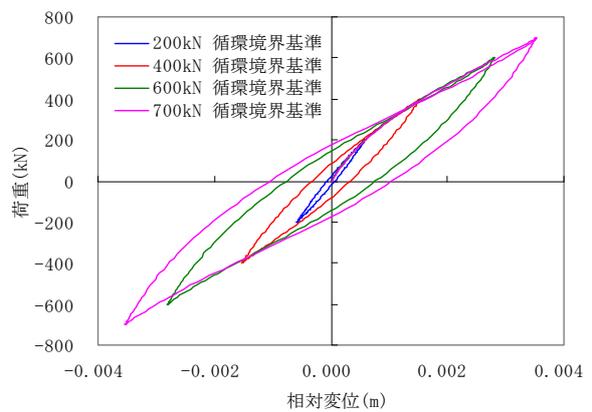
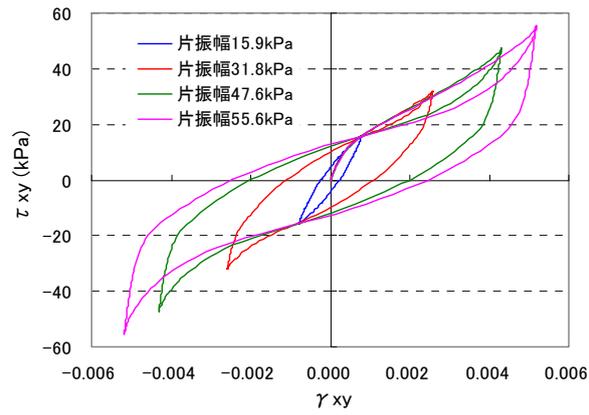
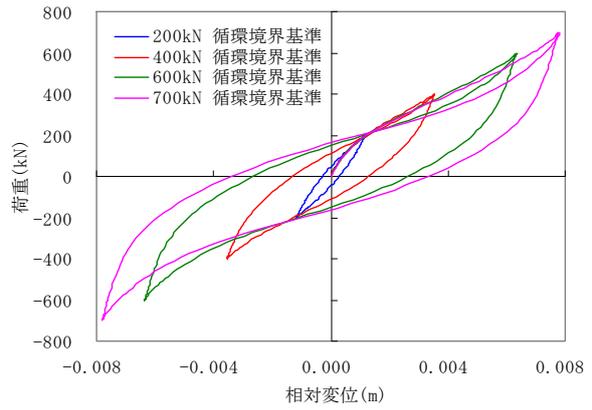


図 4-11-12 飽和砂 ( $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ ,  $S_0=1.0$ ) を対象とした, 水平断面モデルを用いた繰返し荷重解析による杭荷重-相対変位曲線 (2.5D, 5D, 10D: 循環境界基準) と 5D の繰返し荷重解析に対応する要素シミュレーションの応力-ひずみ関係 (左上の図)

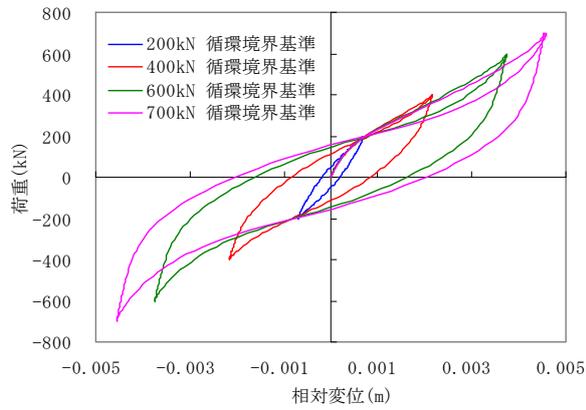
5D要素試験



5D



2.5D



10D

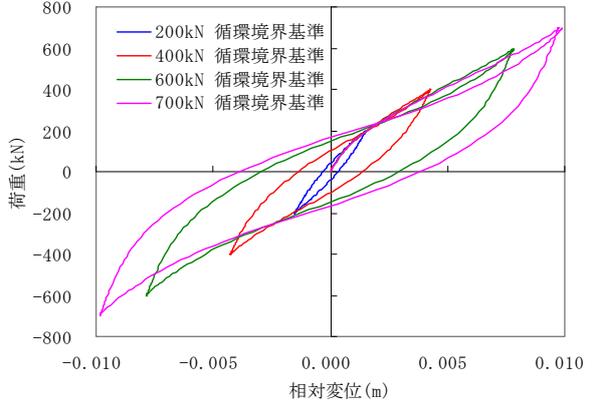
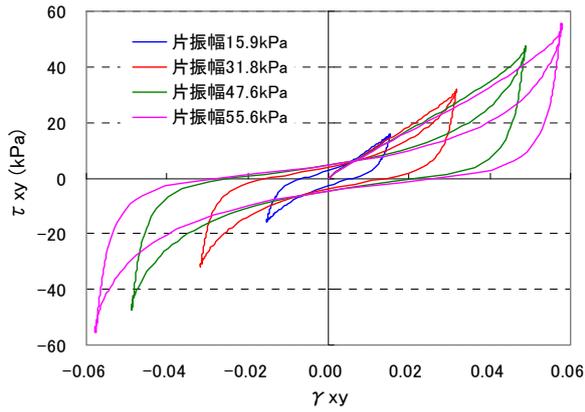
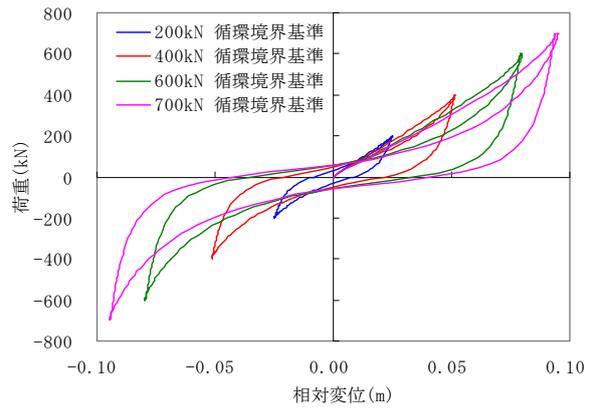


図 4-11-13 飽和砂 ( $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ ,  $S_0=0.5$ ) を対象とした, 水平断面モデルを用いた  
 繰り返し載荷解析による杭荷重-相対変位曲線 (2.5D, 5D, 10D: 循環境界基準) と  
 5D の繰り返し載荷解析に対応する要素シミュレーションの応力-ひずみ関係 (左上の図)

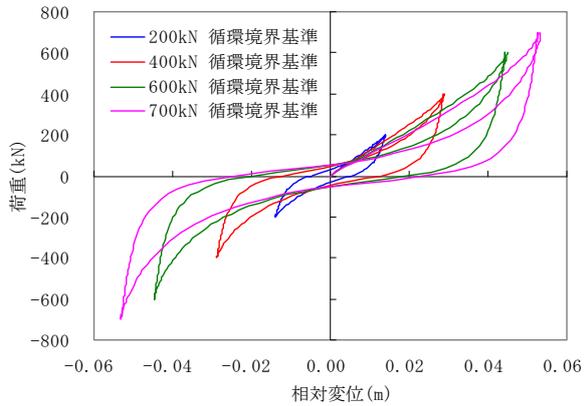
5D要素試験



5D



2.5D



10D

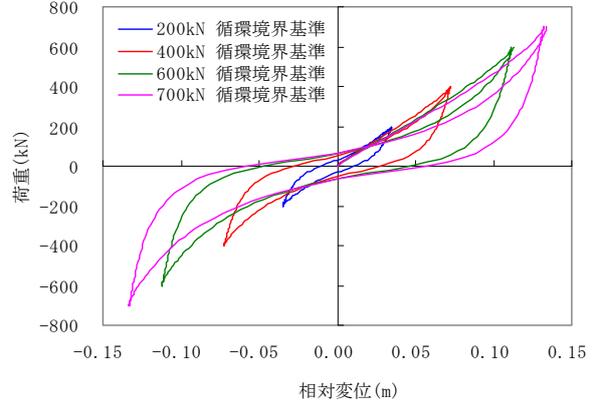
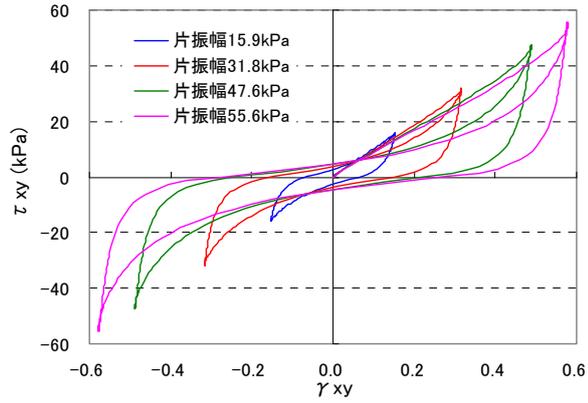
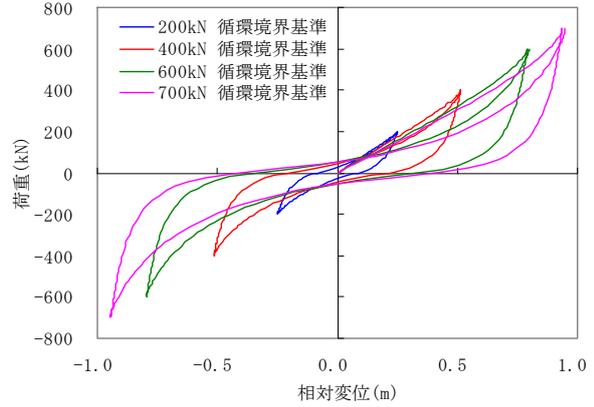


図 4-11-14 飽和砂 ( $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ ,  $S_0=0.05$ ) を対象とした、水平断面モデルを用いた繰返し载荷解析による杭荷重-相対変位曲線 (2.5D, 5D, 10D: 循環境界基準) と 5D の繰返し载荷解析に対応する要素シミュレーションの応力-ひずみ関係 (左上の図)

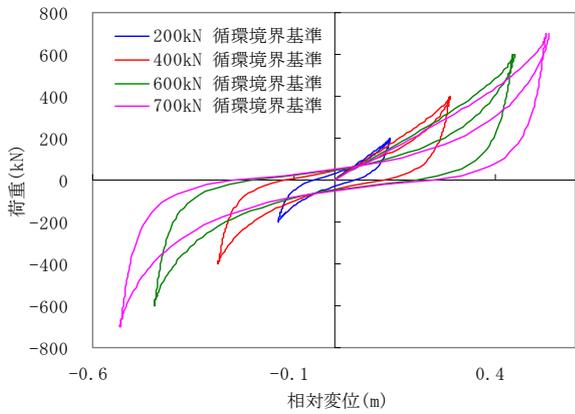
5D要素試験



5D



2.5D



10D

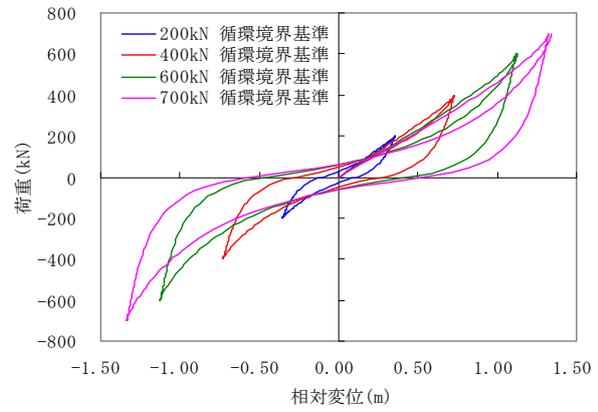


図 4-11-15 飽和砂 ( $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ ,  $S_0=0.005$ ) を対象とした, 水平断面モデルを用いた  
 繰り返し載荷解析による杭荷重-相対変位曲線 (2.5D, 5D, 10D: 循環境界基準) と  
 5D の繰り返し載荷解析に対応する要素シミュレーションの応力-ひずみ関係 (左上の図)

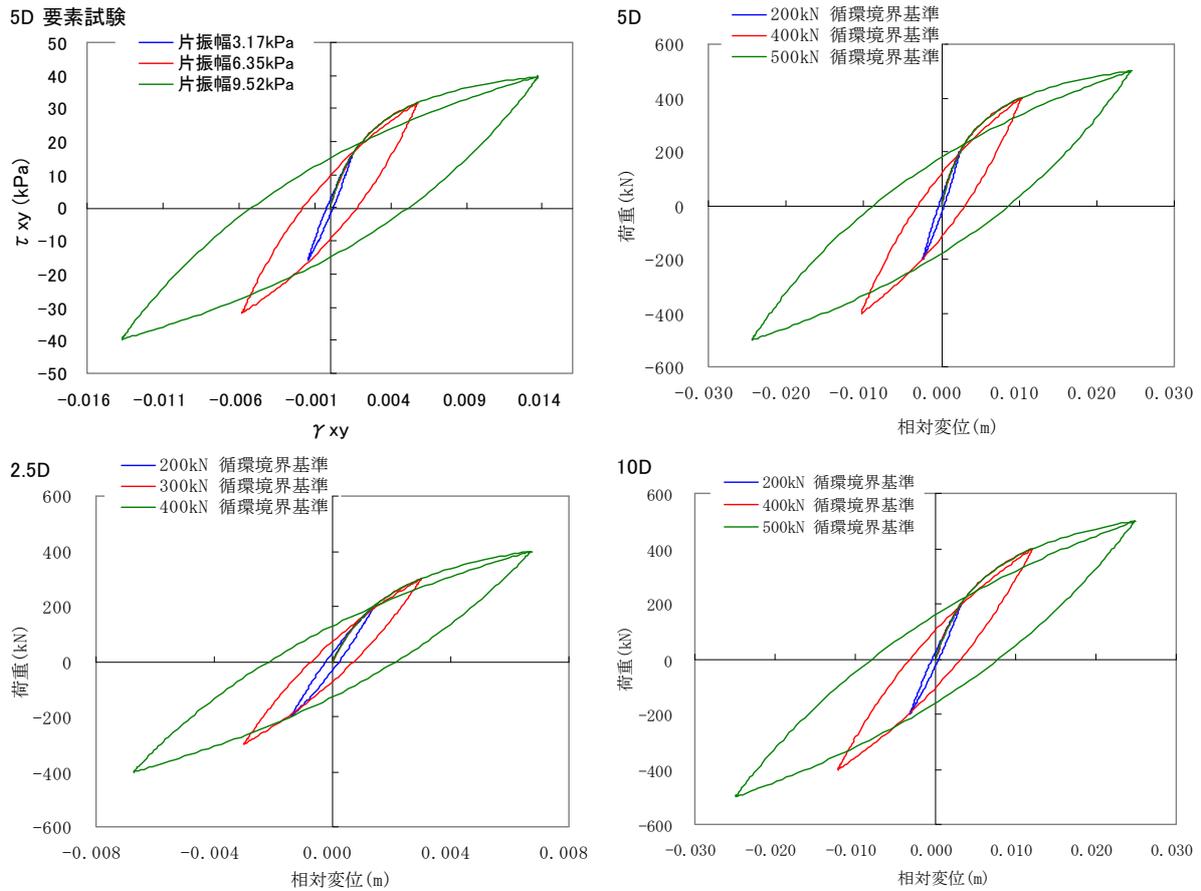


図 4-11-16 飽和正規圧密粘土 ( $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ ) を対象とした、水平断面モデルを用いた  
 繰り返し載荷解析による杭荷重—相対変位曲線 (2.5D, 5D, 10D: 循環境界基準) と  
 5D の繰り返し載荷解析に対応する要素シミュレーションの応力—ひずみ関係 (左上の図)

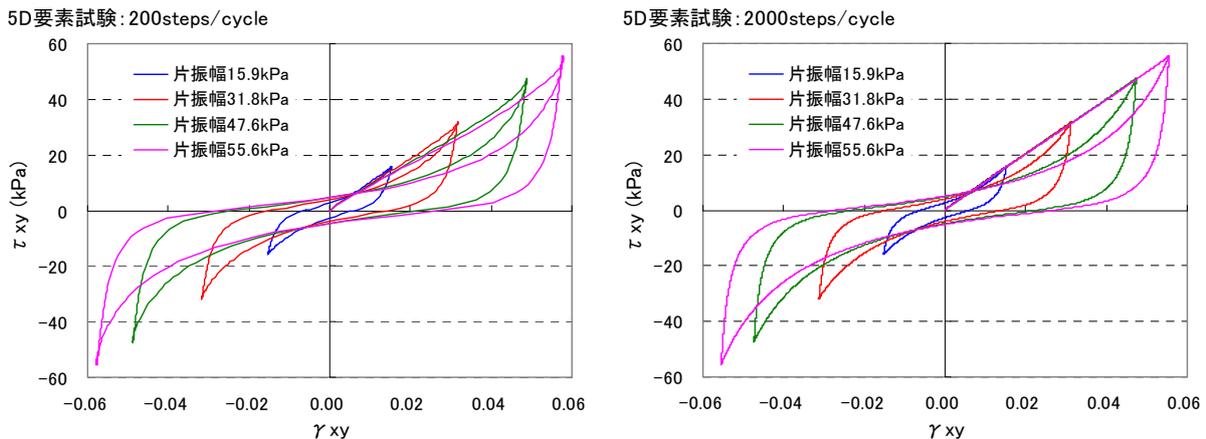


図 4-11-17 飽和砂 (5D,  $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ ,  $S_0=0.05$ ) の繰り返し載荷解析に対応する  
 要素シミュレーションの応力—ひずみ関係 : 左図は、1 サイクルを 200 荷重ステップに、  
 右図は、1 サイクルを 2000 荷重ステップに分割したもの

### (c) 変位とひずみの関係

(4-11-4) 式により荷重－せん断応力の変換を行うことを前提に、杭荷重－相対変位関係と杭周辺地盤の構成則に基づくせん断応力－せん断ひずみ関係を相似にするような相対変位－せん断ひずみの変換関係を求める。このため、各条件下での杭への繰り返し載荷解析に応じて、対応する土要素の要素シミュレーションを実施し、循環境界基準の変位片振幅とせん断ひずみ片振幅の関係を求めた。その結果を、図 4-11-18に示す。

図 4-11-18に記載の各図の縦軸は、循環境界基準の変位振幅を、対応する要素シミュレーションで得られたひずみ振幅で除したものである。この値は、図に示すように、不飽和・飽和などの土の状態、杭間隔、荷重レベル（荷重片振幅／破綻荷重＝せん断応力片振幅／初期せん断強度）、および、液状化フロントパラメータ  $S_0$  に依存している。ただし、どの条件下でも、荷重レベルが小さい場合は、2.5D で 0.8～0.9 程度、5D で 1.5～1.6、10D で 2.3 程度の値となる。また、液状化が進行した場合には ( $S_0=0.05, 0.005$ )、この値は、荷重レベルによらずに一定値となる（2.5D で 0.8、5D で 1.6、10D で 2.3）。

図 4-11-18の各図の縦軸の値を、ひずみ－変位変換係数  $\beta_p$  として、要素シミュレーションにより得られる応力－ひずみ関係のひずみ軸を次式により、循環境界基準の相対変位に変換する。

$$\text{変位} = \beta_p \times \text{せん断ひずみ} \quad (4-11-5)$$

なお、ひずみ－変位変換係数  $\beta_p$  は、後述するように、無次元量である。

### (d) 杭－地盤相互作用ばねの特性

以上の結果によれば、杭径 1m、杭長 1m の場合の杭－地盤相互作用ばねの特性は、その動的特性を除き、次のようにして定めることが出来る（ばねの動的特性については後述する）。

- ① 杭の循環境界基準の相対変位  $u$  を算定する。なお、2次元一体解析モデルを構成する地盤モデルは、循環境界変位を与えるものと仮定する。
- ② 相対変位  $u$  から、(4-11-5) 式を用いて、対応するせん断ひずみ  $\gamma$  を評価する。

$$\gamma = u / \beta_p \quad (4-11-6)$$

- ③ 杭近傍の土の応力－ひずみ関係を参照して、せん断ひずみ  $\gamma$  に応じたせん断応力  $\tau$  を評価する。
- ④ せん断応力  $\tau$  から、(4-11-4) 式を用いて、ばね力  $F$  を評価する。

$$F = \alpha_p \times \tau \quad (4-11-7)$$

杭径  $D$  が 1.0m 以外の場合の、杭－地盤相互作用ばね特性を求める場合には、前節で示したばね特性の杭径に関する性質に基づき、杭径  $D$  を 1.0m とした場合の土要素のせん断応力－せん断ひずみ関係に対して、応力－荷重変換係数を  $D$  倍し、また、ひずみ－変位変換係数も  $D$  倍したものを適用する。

$$\text{荷重} = (D \times \alpha_p) \times \text{せん断応力} \quad (4-11-8)$$

$$\text{変位} = (D \times \beta_p) \times \text{せん断ひずみ} \quad (4-11-9)$$

また、上記 (4-11-8)式は、任意の長さ  $L$  の杭に対しては、次のようになる。

$$\text{荷重} = (L \times D \times \alpha_p) \times \text{せん断応力} \quad (4-11-10)$$

(4-11-9)式および(4-11-10)式について、両辺の次元を比較すると、 $\alpha_p$  と  $\beta_p$  は無次元量でなければならない。

#### (e) 杭－地盤相互作用ばねの実現方法

杭基礎構造物－地盤系の耐震解析を 2 次元一体解析として行うには、これまで述べて来た杭－地盤相互作用ばねの特性を持つばね要素（以下、杭－地盤相互作用ばね要素）により、杭モデルと 2 次元地盤モデルを接続する。まず、奥行き方向幅が杭間隔に等しい 2 次元地盤モデルと奥行き方向に等間隔に配置された杭群中の杭 1 本分のモデルを用意する。地盤要素にはマルチスプリング要素を適用し、杭は線形または非線形のはり要素でモデル化する。杭節点と対応する 2 次元地盤モデルの地盤節点の水平方向並進自由度を、図 4-11-19 に示すように、杭－地盤相互作用ばね要素により接続する。

このような 2 次元一体解析のモデルにおいて、杭－地盤相互作用ばね要素は以下に示すように動作する。

- ① 杭の循環境界に対する相対変位  $u$  を算定する。なお、循環境界変位として、一体解析モデルを構成する地盤モデルの対応する節点変位を参照する。
- ② 相対変位  $u$  から、次式を用いて、対応するせん断ひずみ  $\gamma$  を評価する。

$$\gamma = u / (D \times \beta_p) \quad (4-11-11)$$

なお、 $\beta_p$  は、土質、不飽和・飽和などの土の状態、杭間隔、荷重レベル（荷重片振幅／破綻荷重＝せん断応力片振幅／初期せん断強度）、および、液状化フロントパラメータ  $S_0$  に応じて、図 4-11-18 から定める。

- ③ 杭近傍の土要素を参照して、その変形特性を決めるパラメータと土の状態（主に、有効拘束圧と液状化フロントパラメータ  $S_0$ ）に基づいて、砂の構成則と同様のせん断応力－せん断ひずみ関係を設定し、せん断ひずみ  $\gamma$  を与えてせん断応力  $\tau$  を算定

する。

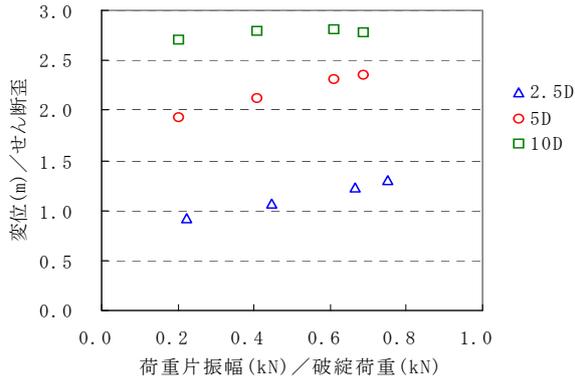
- ④ せん断応力  $\tau$  から、次式を用いて、ばね力  $F$  を評価する。

$$F = (L \times D \times \alpha_p) \times \tau \quad (4-11-12)$$

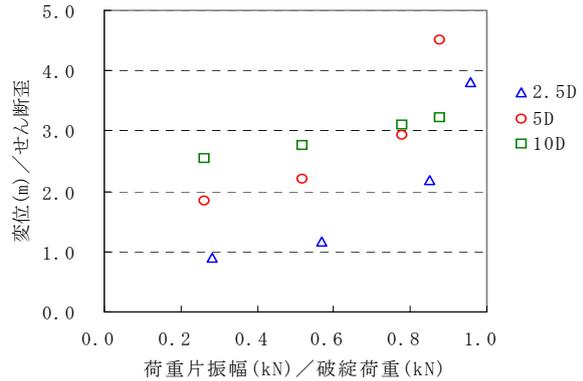
なお、 $\alpha_p$  は、杭間隔に応じて、図 4-11-9 を参照して評価する。

上記②において、液状化を考慮する場合に、ひずみ-変位変換係数  $\beta_p$  の値を決めるには、近傍土要素の液状化フロントパラメータ  $S_0$  の値を参照する必要がある。ある  $S_0$  の値に対しては、 $\beta_p$  は概ね一定値を取るもので、定数とするか、過去に経験した最大の荷重レベルを適用することが考えられる。図 4-11-20 は、杭間隔  $5D$  の場合の飽和砂 ( $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ ,  $S_0=1.0, 0.5, 0.05, 0.005$ ) を対象とした水平断面モデルによる繰り返し載荷解析で得られた荷重片振幅-最大相対変位関係と過剰間隙水圧モデルに基づいて設定したせん断応力  $\tau$ -せん断ひずみ  $\gamma$  関係から設定した荷重-変位関係を比較したものである。過剰間隙水圧モデルに基づき設定した関係では、荷重  $=12.6 \times \tau$ 、変位  $=1.5 \times \gamma$  ( $S_0=1.0, 0.5$ )、または、変位  $=1.63 \times \gamma$  ( $S_0=0.05, 0.005$ ) とした。ひずみ-変位変換係数  $\beta_p$  は荷重レベルに依存して変化する量だが、このように、荷重レベルによらない定数と置いても、全体系の解析結果をよく説明するので、このような取扱いでもよい。

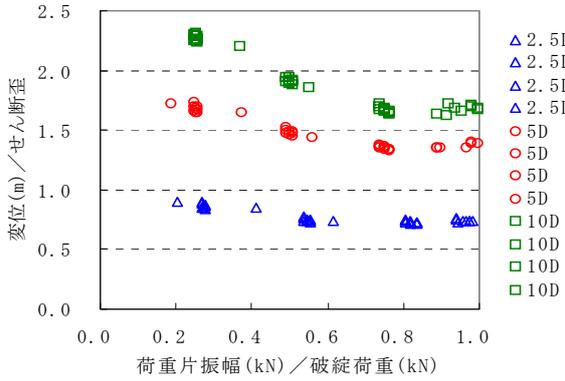
繰り返し載荷 不飽和砂



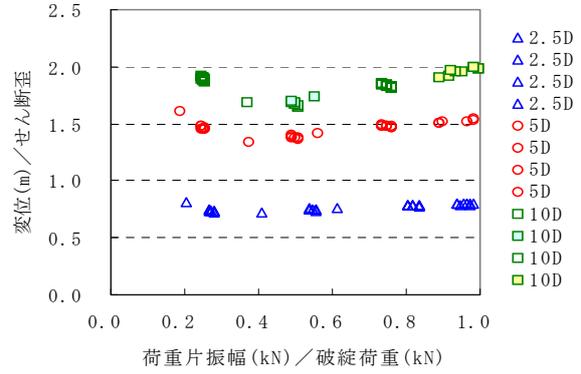
繰り返し載荷 不飽和粘土



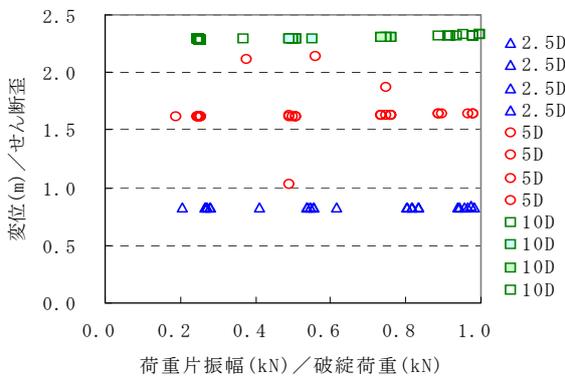
繰り返し載荷 飽和砂  $S_0=1.0$



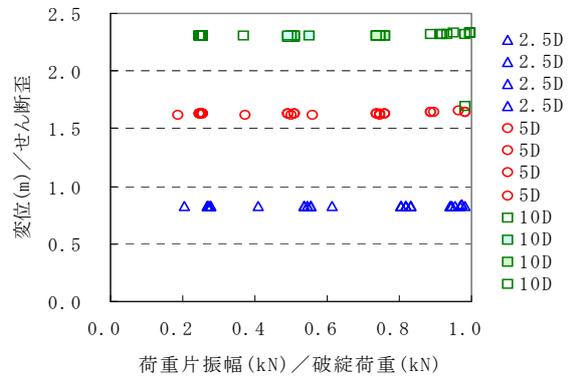
繰り返し載荷 飽和砂  $S_0=0.5$



繰り返し載荷 飽和砂  $S_0=0.05$



繰り返し載荷 飽和砂  $S_0=0.005$



繰り返し載荷 飽和粘土

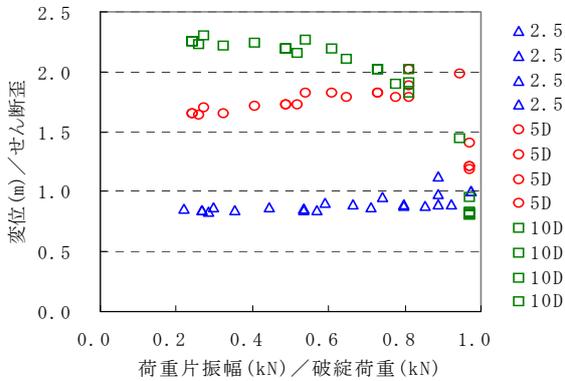
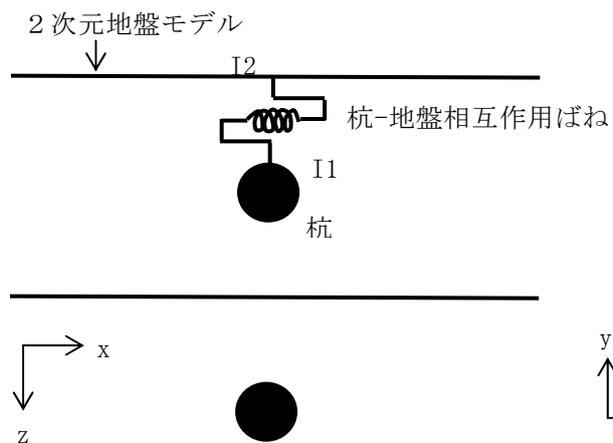


図 4-11-18 循環境界基準の相対変位振幅と要素シミュレーションのせん断ひずみ振幅の比を求めるためのチャート

※破綻荷重で正規化した荷重片振幅と杭間隔の関数として表示. なお, 破綻荷重 = 12.6 (2.5D の場合は 11.5)  $\times \tau_{m0}$

a) 平面図



b) 立面図

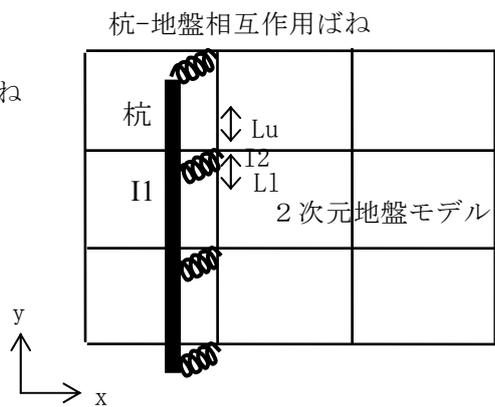


図 4-11-19 杭-地盤相互作用ばねによる2次元一体解析の杭モデルと地盤モデルの連結方法（模式図）

※ I1 は杭-地盤相互作用ばね要素の杭側節点，I2 は地盤側節点， $L_u$  はばねの上側支配長（隣接する上側のばねまでの半分の長さ）， $L_1$  はばねの下側支配長を表す。

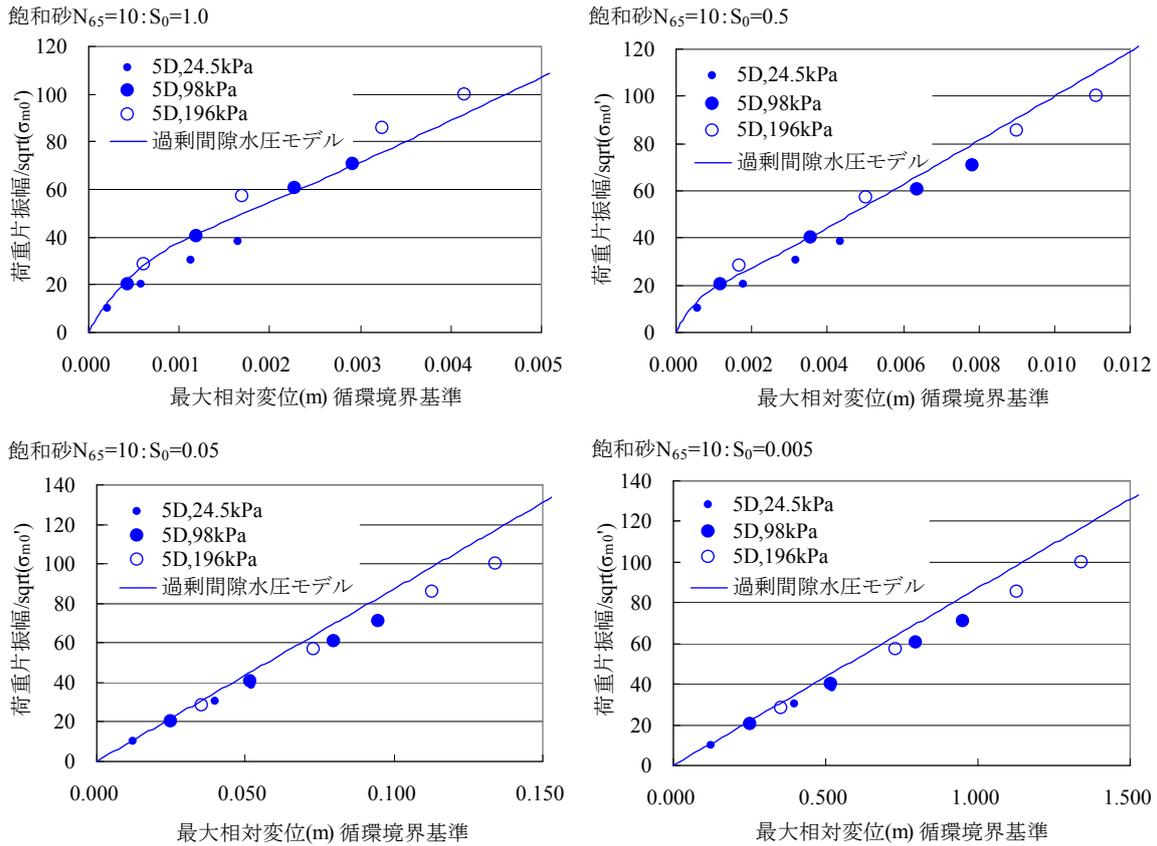


図 4-11-20 飽和砂 (5D,  $N_{65}=10$ ,  $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$ ,  $S_0=1.0, 0.5, 0.05, 0.005$ ):

荷重片振幅—最大相対変位の関係と過剰間隙水圧モデル他に基づいて求めた関係の比較

- ※1 過剰間隙水圧モデルによる曲線は、 $\tau$ と $S_0$ からせん断強度 $\tau_f$ と初期せん断剛性 $G_0$ を求めて、双曲線関係に基づくせん断応力 $\tau$ —せん断ひずみ $\gamma$ 関係を設定し、それを荷重—変位関係に置き換えたもの。置き換えは、荷重= $12.6 \times \tau$ 、変位= $1.5$  (または $1.63$ )  $\times \gamma$ とした。
- ※2 全体系で解いた解が、大きな荷重では、過剰間隙水圧モデルによる曲線の下側に来るのは、荷重ステップ間隔の増大による精度低下によるものと思われる。また、変位—ひずみ変換係数は、荷重片振幅に依存する量だが、このように定数と置いても、全体系の解析結果をよく説明する。

## (2) ばねの動的特性とばね値算定法

ここでは、前節の検討で用いた水平断面モデルを用いて動的載荷解析および対応する土の動的要素シミュレーションを行い、杭-地盤相互作用ばねの動的特性を検討する<sup>6)</sup>。

### (a) 検討対象ケース

杭径  $D$  が 1m, 杭間隔  $S$  が 5D, 地盤が液状化した飽和砂 ( $N_{65}=10$ : 有効上載圧 65kPa 換算の  $N$  値,  $\rho_t=1.8t/m^3$ ,  $\sigma_{m0}'=98kPa$ ,  $S_0=0.05$ , 非排水条件) である水平断面モデルに対して, 片振幅 600kN で 1Hz または 2Hz の正弦波状に変化する水平力を杭芯に加えた。また, 初期接線剛性に比例するレーレー減衰を与えた。剛性比例係数  $\beta$  は, 1Hz の場合は 0.0032 と 0.00032 (通常のレンジ内と極端に小さい場合), 2Hz の場合は 0.0016 と 0.00016 (1Hz に同じ) とした。対応する土の要素シミュレーションでは, 同じ条件の飽和砂の 1 要素 (1m×1m) を対象に (但し, 密度は固有周期が水平断面モデルと同じになるよう調整), 図 4-11-21 に示すように, 98kPa で等方圧密後, 片振幅 47.62kPa ( $=600/\alpha_p$ ) の正弦波状に変化する分布力  $q$  を加えた。加振振動数および減衰については, 水平断面モデルと同様である。分布力の片振幅 47.62kPa は, 水平断面モデルの荷重片振幅 600kN から(4-11-4)式のせん断応力を分布力と読み替えた式により算定した。

### (b) 動的解析結果

水平断面モデルの解析結果である杭荷重-相対変位曲線を図 4-11-22の左列に示す。解析条件は, 上から順に, 0Hz (静的解析), 1Hz で  $\beta=0.0032, 0.00032$ , 2Hz で  $\beta=0.0016, 0.00016$  である。対応する動的要素シミュレーションの結果である分布力-せん断ひずみ関係 (太線) とせん断応力-せん断ひずみ関係 (細線) を同じ図の右列に示す。左右の図が対応していて, 荷重軸と分布力軸はせん断応力を分布力と読み替えた(4-11-4)式で, 相対変位軸とせん断ひずみ軸は(4-11-5)式でそれぞれ対応させている。静的要素シミュレーションでは, 分布力はせん断応力と一致するが, 動的要素シミュレーションでは, 慣性力と減衰力も加わって釣り合いが保たれるので, 分布力とせん断応力は異なる。

剛性比例係数  $\beta$  が通常の数値であれば, 減衰力 ( $=\beta \times$  初期接線剛性  $G_0$ ) は慣性力よりかなり大きく, また水平断面モデルの杭荷重-相対変位関係と要素シミュレーションの分布力-せん断ひずみ関係はよく対応している。従って, この場合, (4-11-4)式と(4-11-5)式に示した杭荷重-相対変位関係とせん断応力-せん断ひずみ関係の変換式がそのまま成り立つ。但し, せん断応力は分布力に読み替える必要がある。すなわち, (4-11-4)式は, 慣性力を無視して, 次式のように変形される。

$$\begin{aligned} \text{杭荷重} &= (D \times \alpha_p) \times \text{分布力} \\ &= (D \times \alpha_p) \times (\text{せん断応力} + \beta G_0 \dot{\gamma}) \\ &= (D \times \alpha_p) \times \text{せん断応力} + \beta (G_0 \times (D \times \alpha_p) / \beta_p) \dot{u} \end{aligned} \quad (4-11-14)$$

ここに、 $G_0$  は杭周辺土の初期せん断剛性、 $\dot{\gamma}$  はせん断ひずみ速度、 $\dot{u}$  は杭の相対速度を表す。上式によれば、慣性力を無視すると、相互作用ばねのばね力は、静的なばね力に、相互作用ばねの初期剛性に比例する減衰項を加えたもので表現される。

①98kPa で等方圧密する。

②振幅 47.62kPa の分布力で動的繰返しせん断を行う。

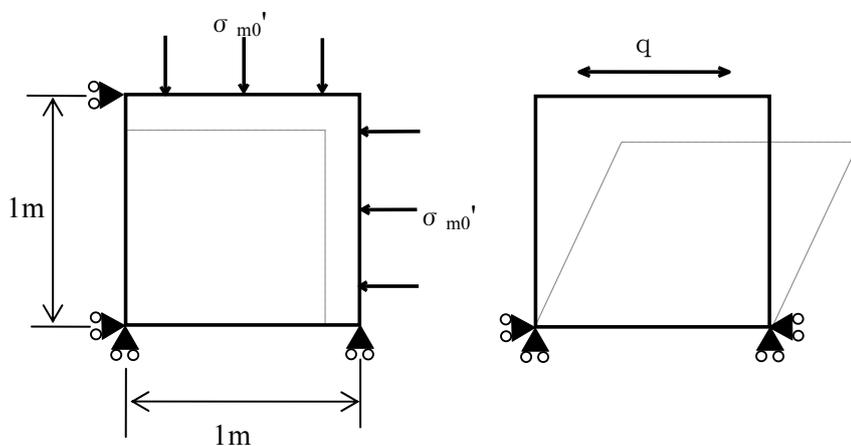


図 4-11-21 動的要素シミュレーションの手順

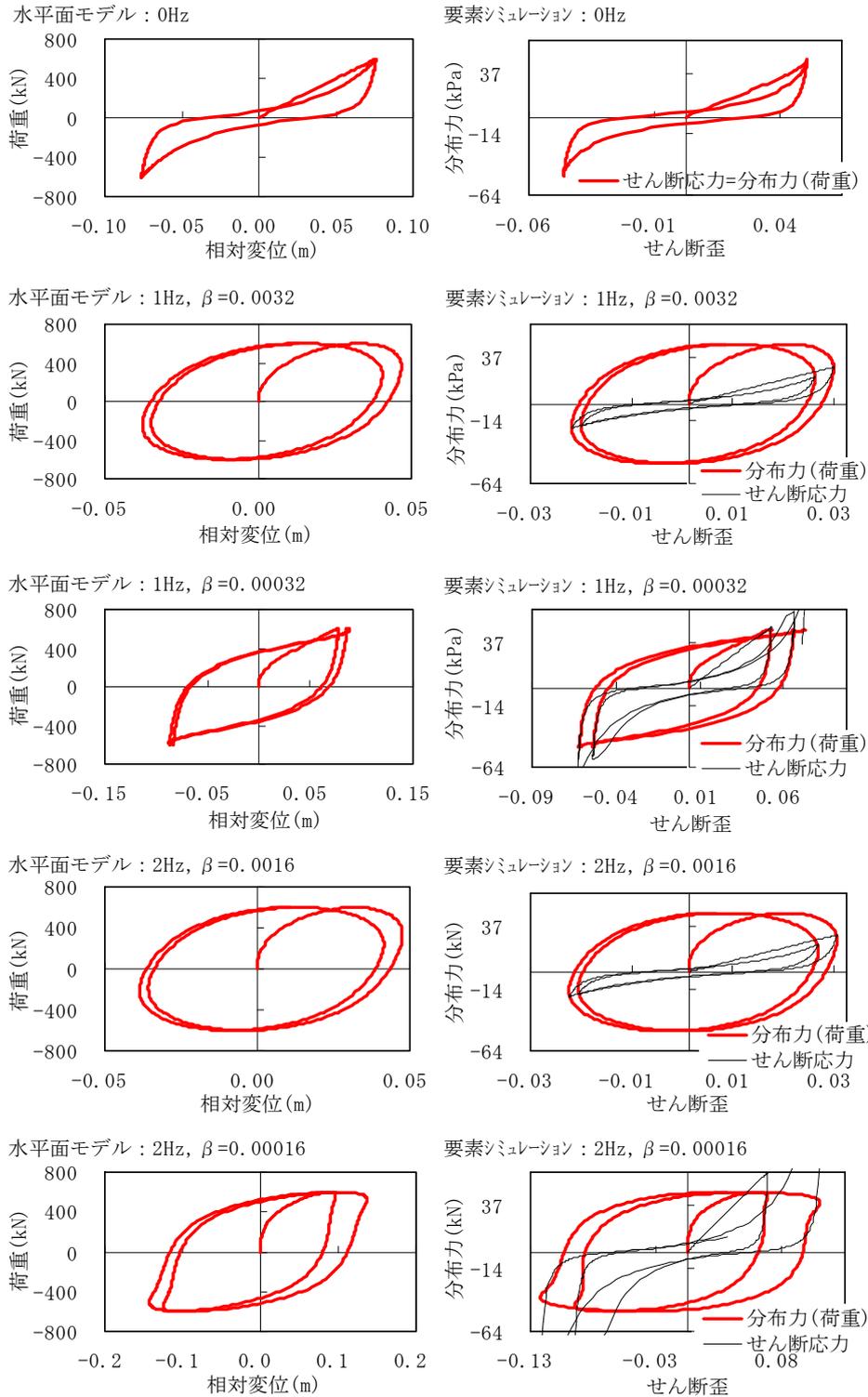


図 4-11-22 水平断面モデルの動的繰返し載荷結果（左列：荷重片振幅=600 kN）とそれに応じた動的要素シミュレーション結果（右列：荷重片振幅=47.62kPa）の比較  
 ※ 対応する図の荷重軸と分布力軸のスケールは(4-11-4)式， 相対変位軸とせん断ひずみ軸は(4-11-5)式の関係を満たしている。

<4-11 の参考文献>

- 1) 三輪滋, 小堤治, 溜幸生, 岡由剛, 一井康二, 井合進, 田河祥一: 2次元水平断面モデルを用いた液状化地盤における杭-地盤系の相互作用の検討, 第38回地盤工学研究発表会, 2003.
- 2) 森田年一, 井合進, Hanlong Liu, 一井康二, 佐藤幸博: 液状化による構造物被害予測プログラム FLIP において必要な各種パラメタ簡易設定法, 港湾技研資料, No.869, 1997.
- 3) Towhata, I. and Ishihara, K.: Modelling Soil Behavior under Principal Stress Axes Rotation, Proc. of 5th International Conf. on Num. Methods in Geomechanics, Nagoya, Vol.1, pp. 523-530, 1985.
- 4) Iai, S., Matsunaga, Y. and Kameoka, T.: Strain space plasticity model for cyclic mobility, Report of Port and Harbour Research Institute, Vol.29, No.4, pp.27-56, 1990.
- 5) 小堤治, 溜幸生, 岡由剛, 一井康二, 井合進, 梅木康之: 2次元有効応力解析における杭と液状化地盤の相互作用のモデル化, 第38回地盤工学研究発表会, 2003.
- 6) 小堤治, 溜幸生, 岡由剛, 井合進, 梅木康之: 2次元有効応力解析における杭と液状化地盤の動的相互作用のモデル化, 第58回土木学会年次学術講演会, 2003.

## 5. プログラム改良と解析精度

FLIP は、1995 兵庫県南部地震の際に被災した神戸港ケーソン式岸壁などの事例解析によりその適用性が既に確認されており、耐震強化岸壁の変形照査を中心として種々の実務において使われている。また、FLIP 研究会などにより、各種材料のモデル化方法の検討などの高度利用化技術の研鑽が進むと同時に、矢板式岸壁や盛土構造物など各種形式の構造物に対する被災事例解析も積み重ねられている。

こういった被災事例解析において、特に、矢板式岸壁の解析では、矢板頂部の水平変位や矢板や控え工に発生する断面力が過大になる傾向が見られた。これに対して、矢板式岸壁の解析精度に影響を与えると考えられた各種要因の検討がなされ、その結果いくつかの修正モデルが提案された。このように、被災事例等の検討を通じ、構成則を含む幅広い観点でプログラムの改良が継続的に実施されている。

一般に、有効応力解析に基づく数値解析の精度向上のためには、以下の①～⑤に示すモデルや数値解析法の精度を向上し、それらの結果を総合的に用いる必要がある。

- ① 砂の力学モデル
- ② 二相系の運動方程式とその数値解析法
- ③ 境界条件・接触条件・杭－地盤系相互作用の各モデル
- ④ 初期状態の設定法
- ⑤ 砂以外の土や材料あるいは各種部材に関する力学モデル

解析精度に影響する要因は、上記①の範疇のみならず②～⑤の範疇にもあって、全体を見渡さないと解析精度の向上は望めない。また、部分的な改良は、全体のバランスを崩し、再現性を低下させる可能性もある。

つまり、FLIP 研究会では、プログラム改良等を通じて FLIP の解析精度向上を図ってきたが、基本的には個別の構造形式や個別の状況に対して行われたものであり、その中で提案された種々の新しいモデルを同時に様々な構造形式に対して適用した場合でも、精度のよい解析結果が得られるか否かについての検討はなされていない。したがって、A という構造形式に適切であったプログラム（および解析条件）に対して、B という構造物への適用性を向上するために手を加えると、適切でなくなっている可能性もある。

この観点からは、プログラムの改良等の進捗に応じて、適切なタイミングで、全体的な適用性を把握しておく必要がある。また、できれば、構造形式ごとにプログラムのバージョン（および解析条件設定）を変えるのではなく、同一のプログラムのバージョン（および解析条件）が、十分な再現性を保っていることが望ましい。

そこで、平成 15 年度には、FLIP 研究会の解析精度向上作業部会において、これまでに提案された各種修正モデルを組み合わせることで種々の形式の構造物の被災事例解析や実験解析に適用した場合に、従来から精度のよい解が得られていた構造形式に対しても、そうでない構造形式に対しても、ともに被災事例や実験結果を説明する解が得られるか否かについ

て検討された。この検討は、いずれの構造形式に対しても適用可能な修正モデルの適当な組み合わせを見出すことを目標に実施されたものである。

同様に、種々の被災事例および無被災事例に対する再現性の確認は、Steady State WG や透水解析 WG においても、Sus 法やカクテルグラスモデルの適用性を議論する観点から実施されている。ここでは、検討方法の概略を把握するため、解析精度向上 WG の検討結果を紹介する。また、FLIP 研究会における活動ではないが、解析結果の解釈における課題等についての検討事例を紹介する。

## 5-1 解析精度向上 WG の検討

平成 15 年当時までに、各種形式の構造物の被害事例解析などを通じて、以下の a.~h. に示すような、解析精度に影響を及ぼすと考えられた諸要因についての影響検討がなされていた。また、それぞれに対し、FLIP に則して解析精度向上を図るための方法も提案されていた。

- a. 変相線を超えた応力空間におけるせん断仕事の負のダイランシーへの寄与評価法
- b. 応力-ひずみ関係の非線形反復計算法
- c. 初期応力状態の評価法（多段階初期自重解析法）
- d. 減衰の与え方（レーレー減衰の与え方）
- e. ジョイント要素の滑り挙動の減衰支配の解消
- f. 杭-地盤系の相互作用における 3 次元効果の考慮
- g. 捨石の材料定数
- h. 大変形効果

上記について、a.は FLIP 研究会構成則検討会にて、b.は第 2 期 FLIP 研究会事務局にて、c.は FLIP 研究会矢板式護岸作業部会にて、d.は FLIP 研究会企画委員会にて、e.は同じく FLIP 研究会企画委員会にて、f.は第 2 期 FLIP 研究会杭基礎作業部会にて、g.は FLIP 研究会捨石作業部会にて、h.は第 2 期 FLIP 研究会事務局にて、それぞれ解析精度に与える影響検討がなされ、改良モデルが提案されている。

上記の各項目（a.~h.）に対する説明は、本報告書の対応する箇所を参照されたい。

（a.は 2-3, b.は 2-4-1, c.は 2-1, d.は 3-1-1, e.は 3-1-2, f. 4-11, g.は事例編 2-5-1, h.は 2-4-2）

以下、各構造形式ごとに、検討項目の一覧とまとめを示す。

(1) 矢板式岸壁

矢板式岸壁の解析法に関する経緯として、まず、平成 11 年当時に、FLIPver4.2 で矢板式護岸の解析を行った場合、入力地震動が比較的小さいにもかかわらず、矢板の変位、断面力が過大になってしまう問題が生じていたことを指摘しておく必要がある。そして、この問題を解決するために、FLIP 研究会内に矢板式護岸作業部会が設置され、平成 11～12 年度の 2 カ年で検討が行われた。その際の結論は下記のとおりである。

- 1) 自重解析では「地盤の初期応力を考慮した多段階法（築堤解析）」を用いる。
- 2) 動的解析では、「変相線を越えた領域での塑性せん断仕事のダイレタンシーへの寄与度合いを見直したプログラム」を用いる。

また、その後、過剰間隙水圧上昇時において応答加速度にスパイク状のピークが発生する問題を解決するために、改良型の非線形反復計法が提案されている (FLIPver5.0 以降)。しかし、この改良型非線形反復法を用いた場合には、矢板の変形、断面力が低減することがわかってきた。これらの経緯が、矢板式護岸の被災事例、無被災事例を検討して最適なモデル化を提案するための検討を実施した背景である。

したがって、解析結果に影響を与える要因の中で、矢板式護岸に関連する項目は以下のとおりである。

- a. 変相線を越えた応力空間におけるせん断仕事の負のダイレタンシーへの寄与評価法
- b. 応力-ひずみ関係の非線形反復計算法
- c. 初期応力状態の評価法（多段階初期自重解析法）
- d. 減衰の与え方（レーレー減衰の与え方）
- e. ジョイント要素の滑り挙動の減衰支配の解消
- f. 杭-地盤系の相互作用における 3 次元効果の考慮
- g. 捨石の材料定数

さらに、矢板のモデル化の項目としては、下記の項目 i. についても影響が検討された。

- i. 鋼材のモデル化に用いるはり要素の種類（線形はり要素，非線形はり要素）
- 検討では、表 5-1-1 に示す事例が対象となった。

表 5-1-1 検討事例

事例	被災の有無	岸壁水深	設計震度	矢板諸元	控え構造	備考
秋田港大浜 1 号岸壁	無被災	-10m	0.15	鋼矢板 IV <sub>L</sub>	鋼管杭 φ750t10、 (2.0m ピッチ)	
秋田港大浜 2 号岸壁	被災	-10m	0.15	鋼矢板 IV <sub>L</sub>	鋼管杭 φ550t12、 (2.0m ピッチ) 2 列	
釧路港第 1 埠頭南側岸壁	無被災	-12m	0.20	鋼管矢板 φ914.4t14	控え矢板 鋼矢板 IV 型	液状化対策 有り
釧路港漁港埠頭南側岸壁	被災	-7.5m	0.20	鋼矢板 Z25 型	組杭 φ400t9、φ800t12 (1.6m ピッチ)	

大浜 1 号岸壁と大浜 2 号岸壁に対する解析ケースの一覧を表 5-1-2 に、釧路港第 1 埠頭南側岸壁に対する解析ケースの一覧を表 5-1-3 に、釧路港漁業埠頭に対する解析ケースの一覧を表 5-1-4 に示す。紙面の都合により解析結果は割愛するが、このように、被災事例（秋田港大浜 2 号岸壁，釧路港漁港埠頭南側岸壁）と，無被災事例（秋田港大浜 1 号岸壁，釧路港第 1 埠頭南側岸壁）に対する検討の結果，平成 15 年度時点での推奨モデルは，以下のようにまとめられている。

a. 構成則：tmp7 法

b. 非線形反復法：改良型非線形反復法

c. 初期自重解析：多段階法（築堤解析）

d. 減衰の与え方

：自由地盤部の非線形・非液状化解析で  $\beta$  を小さくしていくと応答変位分布が収斂してくるが，そのときの  $\beta$  を用いる。

e. ジョイント要素の滑り挙動の減衰支配

： $\beta =$  全体系の  $\beta$  として差し支えない。ただし，矢板主働側にはジョイント要素を用いず，MPC 指定により滑り摩擦をゼロとする場合に限る。（これは当時の検討なので，現在では，矢板主働側のジョイント要素のレーレー減衰を 0 とし，時間間隔を細かくして計算してもよいと思われる）

f. 杭－地盤系の相互作用における 3 次元効果の考慮

：初期自重解析を現在提案している多段階法を用いた場合，控え杭を等価な剛性を持つ矢板として解析しても，被災，無被災事例を再現することができる。

g. 捨石の材料定数

：矢板式護岸の裏込石に関しては，従来法，新捨石定数指定のどちらでも解析結果にはほとんど影響を与えない。

i. 鋼材のモデル化

：鋼材が非線形領域に入る可能性がある場合には非線形はり要素を用いる。

また，矢板の主働側の摩擦の考慮に関しては，ジョイント要素を配置して摩擦を考慮すると変位や断面力が若干低減することがわかった。ただし，耐震性能照査などで，安全側の評価を得たい場合には，摩擦を無視して計算することも考えられる。

項目 f. の杭－地盤系の相互作用における 3 次元効果に関しては，釧路港漁港埠頭に対しては適用性が確認できた。（その後，秋田港大浜 1 号，大浜 2 号岸壁に対する検討も実際されている）

なお，矢板式岸壁の解析におけるモデル化の詳細については，FLIP 研究会の 14 年のまとめ（事例編）を参照されたい。

表 5-1-2 大浜 1 号岸壁および大浜 2 号岸壁に対する解析ケース一覧

ケース名	a 構成則	b 反復法	c 初期自重	d レーレー 減衰	e ジョイント	f 相互作用 ばね	g 捨石物性	i 鋼材物性
CASE-A	従来	従来	多段階	0.0005	全体系と同じ	考慮せず*	-	線形
CASE-A'	従来	従来	多段階	0.0005	全体系と同じ	考慮せず*	-	非線形
CASE-B	tmp7	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	考慮せず*	-	線形
CASE-B'	tmp7	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	考慮せず*	-	非線形
CASE-C	tmp3	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	考慮せず*	-	線形
CASE-C'	tmp3	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	考慮せず*	-	非線形
CASE-D	従来	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	考慮せず*	-	線形
CASE-D'	従来	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	考慮せず*	-	非線形
CASE-E	tmp7	改良	1段階	0.0005	全体系と同じ	考慮せず*	-	線形
CASE-E'	tmp7	改良	1段階	0.0005	全体系と同じ	考慮せず*	-	非線形
CASE-F	tmp3	改良	1段階	0.0005	全体系と同じ	考慮せず*	-	線形
CASE-F'	tmp3	改良	1段階	0.0005	全体系と同じ	考慮せず*	-	非線形

表 5-1-3 釧路港第 1 埠頭南側岸壁に対する解析ケース一覧

ケース名	a 構成則	b 反復法	c 初期自重	d レーレー 減衰	e ジョイント	f 相互作用 ばね	g 捨石物性	i 鋼材物性	備考
CASE-A	tmp7	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	-	従来	非線形	
CASE-B	従来	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	-	従来	非線形	
CASE-C	従来	従来	多段階	0.0005	全体系と同じ	-	従来	非線形	
CASE-D	tmp7	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	-	新捨石定数	非線形	
CASE-E	tmp7	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	-	従来	非線形	矢板、控えの主働側にジョイント要素配置
CASE-F	tmp7	改良	多段階	0.0005	$\beta=0(\Delta t=0.001s)$	-	従来	非線形	
CASE-G	tmp7	改良	多段階	0.0005	$\beta=0(\Delta t=0.001s)$	-	従来	非線形	矢板、控えの主働側にジョイント要素配置
CASE-A(1)	tmp7	改良	多段階	0.0016	全体系と同じ	-	従来	非線形	
CASE-A(2)	tmp7	改良	多段階	0.00025	全体系と同じ	-	従来	非線形	
CASE-A(3)	tmp7	改良	多段階	0.0001	全体系と同じ	-	従来	非線形	
CASE-A1	tmp7	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	-	従来	非線形	背後地盤の軟状化対策なし
CASE-Aa	tmp7	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	-	従来	非線形	東方沖地盤
CASE-Ab	tmp7	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	-	従来	非線形	十勝沖地盤

表 5-1-4 釧路港漁業埠頭に対する解析ケース一覧

ケース名	a 構成則	b 反復法	c 初期自重	d レーレー 減衰	e ジョイント	f 相互作用 ばね	g 捨石物性	i 鋼材物性	備考
CASE-A	tmp7	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	考慮	従来	非線形	層砂の等価N値5
CASE-B	tmp7	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	考慮	従来	非線形	層砂の等価N値10
CASE-C	tmp7	改良	多段階	0.0005	全体系と同じ	考慮	従来	非線形	層砂の等価N値15

## (2) 重力式岸壁

重力式岸壁については、1995年兵庫県南部地震の際に被災した神戸港六甲アイランドのRF3岸壁と1993年釧路沖地震を経験した釧路港西港の第2埠頭東側岸壁(-10m)を、それぞれ被災事例及び無被災事例として、検討が実施された。このうち、被災事例であるRF3岸壁の検討事例については、参考文献1)にも詳しく記述されている。

重力式岸壁の検討における特徴としては、被災事例の解析において、既にケーソン式岸壁の被害推定に対する適用性が確認されている従来法に加えて、その後に提案された改良モデルをすべて同時に適用したケースにおいても、解析結果が被災事例を説明するかどうかを検討した点である。すなわち、矢板式岸壁の際には、従来法による事例の再現性が低かったことに起因して改良が加えられたという経緯があるのに対して、重力式岸壁では従来法でも再現性が高く、改良の必要性が認識されていなかった点である。

解析結果は、従来法に比べ変形量が減少するものの、改良モデルをすべて同時に適用しても、十分に被災事例を説明することができた。

しかし、過去の解析ケースとの連続性を確保する上で、従来法によって再現性が確認されている事例に対して提案法を適用した場合においても、従来法の解析結果とほぼ同じ大きさの被災変形量が得られることが望ましい。また、提案法では時間ステップが細かい(0.001秒)ため多大な計算時間を要し、従来レベルの時間ステップ(0.01秒)で解析可能であることが望ましい(時間ステップが1/10だと、計算時間は約10倍かかり、当時の範囲では1ケースあたり20~30時間程度の計算時間を要した)。

このため、改良法の選択の組み合わせを種々に変えたパラメトリックスタディが実施された。解析ケースの一覧を表5-1-5に示す。この結果、ジョイントと捨石物性の改良法をともに採用しないことで、実務的な使い勝手を失うことなく、改良モデルを全て用いた提案法と同様の再現性を確保することができた。また、小さめのレーレー減衰パラメータ $\beta$ を採用することで、変形量のレベルを従来法と同レベルに調節することも可能であった。

したがって、数多くの対策工法案などについて、解析結果の傾向を把握するために多くの解析ケースを実施するような場合には、従来法やジョイントと捨石物性の改良法をともに採用しない解析条件により解析を実施し、最後に確認のために時間のかかる提案法の条件で結果の確認のために解析を実施するといったアプローチの可能性が示唆された。なお、一部のみの改良法を採用することが、全体のバランスを崩し、かえって従来法より再現性が低下する例が存在することも示された。

また、無被災事例の解析では、被災事例の検討結果をふまえ、従来法によるケースと提案法を用いたケース、さらに提案法でレーレー減衰パラメータを小さく設定したケース、実務的観点から解析時間の短縮を意図したケースが検討された。どのケースにも大きな違いはなく、解析結果と実測値は概ね整合した。

したがって、従来法に加えて、提案法の適用性が確認された。

表 5-1-5 重力式岸壁を対象とした解析ケース一覧

( $\beta=0.002$ , 変位量の単位はm, 下線数字は実測値の範囲外)

ケース	反復法	せん断 仕事	ジョイント	時間 間隔	捨石 物性	水平 変位	鉛直 変位	傾斜角 (度)
ケース E	従来	従来	従来	0.01	従来	3.71	1.49	1.22
ケース F	改良	従来	従来	0.01	従来	2.68	0.87	1.52
ケース G	改良	tmp7	従来	0.01	従来	2.41	0.59	3.83
ケース H	ケース G に対し, 全体のレーレー減衰を減少 ( $\beta=0.0005$ )					3.00	0.71	4.27
ケース I	改良	tmp3	従来	0.01	従来	2.11	0.46	3.37
ケース J	改良	tmp7	改良	0.001	従来	2.40	0.55	3.46
ケース K	ケース J に対し, 全体のレーレー減衰を減少 ( $\beta=0.0005$ )					3.12	0.69	4.75
ケース L	改良	tmp3	改良	0.001	従来	<u>2.04</u>	0.43	3.54
ケース M	改良	tmp7	改良	0.001	改良	2.85	0.63	3.99
ケース N	ケース M に対し, 全体のレーレー減衰を減少 ( $\beta=0.0005$ )					3.29	0.71	4.37
ケース O	改良	tmp7	従来	0.01	改良	3.81	1.21	<u>7.44</u>
ケース P	ケース O に対し, 全体のレーレー減衰を減少 ( $\beta=0.0005$ )					4.21	1.12	<u>7.32</u>
ケース Q	改良	tmp3	従来	0.01	改良	3.23	0.85	6.19
被災状況						2.08~ 4.64	1.14~ 1.98	-2.2~ 6.4

### (3) 盛土

盛土については, 2つの河川堤防(後志利別川と淀川)と, 1つの遠心模型実験の盛土を対象に検討が実施された。主な結果は下記の通りであった。

#### a) 河川堤防

河川堤防では, 従来法では沈下量を再現できたものの, 改良型非線形反復法+tmp7法を用いた場合には沈下量が過小評価される結果となった(図 5-1-1)。これは, 特に改良型反復法の影響を強く受けていた。この影響は, 特に後志利別川のケースで顕著であった。

これらは, 盛土直下に分布する液状化強度の小さい層で, 有効応力の低下に伴う剛性低下が適切に再現されない「ロック現象」が生じたためと考えられた。つまり, 従来積分法では, 盛土直下の応力状態が破壊線に近いこともあり, 不釣り合い力が変形を大きく算出する方向に作用していたと考えられたが, 積分法を改良することにより, よりモデルに忠実な解析が実施され, 破壊線近傍での変形の急増が表現できなくなったものと想定された。

つまり, 改良型非線形反復法+tmp7法では, FLIPの構成則に忠実に計算ができるようになった反面, 盛土直下要素では, 初期応力状態で破壊に近い場合, 水圧の上昇による軟化を起こさずに, 破壊線にそって剛性が増加し続ける挙動も忠実に再現するようになった。

これに対し、従来積分法では、破壊線に近いところでの挙動を、積分法の誤差によって、ちょうどまい具合に、破壊に近い状況でひずみが伸びる挙動を表現できていたとも言える。

本来は、改良型非線形反復法+tmp7法を推奨する解析法としたいところであるが、当時は変形がロックされる現象に対して適切な対処法を提案することができず、当面の実務的な対処としては、従来法を採用せざるを得ないとまとめられた。つまり、当時の解析レベルでの河川堤防の解析結果からは、従来の時間積分法の方が、沈下量を算定する観点での適用性が高いと考えられた。ただし、たまたまうまく説明できた可能性も高いともいえ、本来的な解決法を提案するべく、せん断変形ロック問題WG、さらにはSteady State WGの検討が継続的に実施された。(Sus法の導入により現在は解決されている)

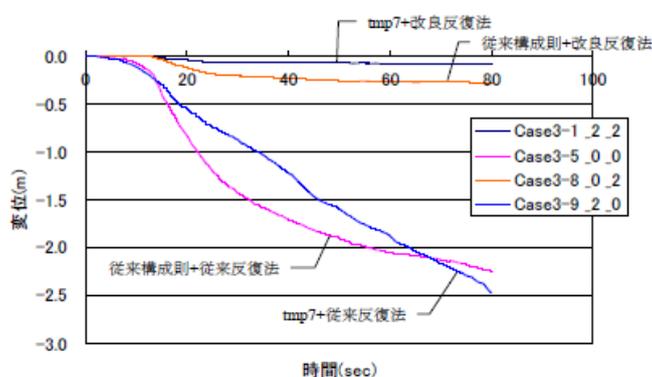


図 5-1-1 盛土天端の沈下量の比較

#### b) 遠心模型実験

遠心模型実験でのシミュレーションでは、従来法では、変形を過大に評価していたが、改良型反復法の影響の影響はさほど大きくない結果であった。河川堤防と比較し、盛土直下の要素における自重解析後の応力状態が、破壊線より比較的小さい軸差せん断状態であったことが、河川堤防との大きな違いと考えられた。(ただし、遠心実験では細粒分のない砂が使われているため、河川堤防の事例よりSusの値が大きく、この違いの影響が大きかった可能性もある)

なお、改良型非線形反復法+tmp7法を用いても変形量は変化せず過大なままであった。これに対し、さらに簡易大変形解析を併用した結果、実験結果と同じオーダーの沈下量を算出することができた。すなわち、遠心実験の結果からは、改良型非線形反復法+tmp7法+簡易大変形解析がもっとも適用性がある結果となった。

以上の検討より、初期応力状態と変相角の関係によって、この影響が顕著になる場合とそうでない場合があると言えた。つまり、盛土直下の液状化要素が初期応力解析終了時に、破壊線に近い状態で存在すれば、せん断仕事による剛性低下が起きにくく、変形が「ロック」される状態が生じやすいと考えられる。

したがって、盛土については、改良型非線形反復法+tmp7法を適用する際、初期応力状態と変相角の関係を見極めた上で結果を評価することが望ましい。また、同様のことが、他の構造においても、例えばケーソン直下の挙動に支配されるような場合も生じるであろうと推察された。

実務的には、変形を過小に評価することだけは、避けなければならない。この観点からは、当時の判断としては、当面、従来法（簡易大変形無し）で検討せざるを得ないと結論付けられた。

実際の現象としては、土質条件と応力条件にもよるが、**Steady State**あるいは**Quasi Steady State**の状態のように、ひずみが急増する点がある場合があると考えられる。また、透水性の影響などによって、正のダイレイタンス効果が無制限に発揮されるわけではない。

これらは、いずれもせん断耐力の上限設定に関連するものであり、以下のような構成則の改良が必要と考えられた。

- ・透水性の考慮による軟化の考慮。
- ・破壊線と交わり（あるいは破壊線の近傍の**Steady State**状態等で）歪みが急増するモデル

これらの課題は、透水解析WGによるカクテルグラスモデルの検討、および、せん断変形ロックWGから**Steady State WG**でのSus法の検討へと引き継がれている。このように、平成15年当時には、盛土に対しては種々の課題が残される結果となった。しかし、実務的な当面の対策を提案すると同時に、課題が明らかとなり、解析手法が新たな段階へと進捗する重要なステップであったといえる。

## 5-2 解析精度と解析結果の解釈（三上）\*

数値解析の結果として出力される数値には、加速度・速度・変位・応力・ひずみ等、種々の種類がある。一般的に、有限要素法の結果に基づく設計では変位に着目して解析結果を判断することが多い<sup>2)</sup>。しかし、出力した値によって、解析結果の信頼性および精度は異なっていることが多いことに注意する必要がある。

例えば、重力式係船岸における使用性の検討項目としては、岸壁背後の段差や岸壁法線方向の法線の出入り（凹凸変位量）がある<sup>3)</sup>。しかし、岸壁背後に生じる段差を予測するためには、地表面付近の地盤や構造部材の挙動を予測する必要があるため、例えば岸壁全体の海側変形量や沈下量を予測するよりも困難であり、解析精度も低下すると考えられる。また、一般に二次元の解析において岸壁法線方向の法線の出入りを評価することは、解析断面の奥行き方向に解析結果のばらつき等を評価することに近く、現実的には困難である。このため、一般には解析による実事例の再現性が高い岸壁天端の海側変位量などを解析で着目する出力とし、具体的に使用性等の性能を規定する指標は、過去の被災事例に基づいて岸壁天端の海側変位量などから間接的に推定する方法を用いても良い。例えば、最大法線はらみだし量と法線の出入りについては相関性が検討されており<sup>3)</sup>、これらの関係を用いて性能を規定する指標の評価を行うと良い。

このように、解析結果を基に変形等の照査を行う場合には、単純に計算結果の大小によって判断を行うのではなく、変形モードの分析等により、計算結果の出力値の特性を考慮して総合的な判断を下すことが必要である。

また、解析結果の解釈においては、被災事例における変形量についても、実際にはばらつきがあることに留意する必要がある。すなわち、解析による再現性が確認されていても、実事例のばらつきの範囲内で妥当な値を再現しただけである。少なくとも、実際の事例に見られる変形のばらつき程度の誤差は解析結果に含まれていると考えられる。

動的解析の精度に影響を及ぼす要因としては、たとえば次のようなものが挙げられる。

- a) 解析手法の精度（プログラムの適用性の程度）
- b) 地震動入力 of 精度
- c) 入力パラメータを設定する根拠となった地盤調査結果，室内試験データの精度
- d) 境界条件等の解析上の条件設定の適切さ
- e) 試験データをもとにした解析入力パラメータ設定の適切さ

FLIPに限らず、一般には、a)は、既往の被災事例や無被災事例を通じて、適用性が確認されたと報告されていることが多い。ただし、繰り返すが、実事例のばらつきの範囲内で妥当な値を再現しただけで、最大値を再現できるのか、（どのように定義するかという問題自体が難しいが）平均値を再現できるのかは、たいていの場合において曖昧である。

そして、解析結果の再現性が不十分である時には、その原因をb)やc)として、報告書を記述することが多いと思われる。近年では、被災事例等においても、中小地震観測結果を

もとにサイト特性や位相特性を評価することで、b)の精度は向上したと思われる。しかし、予算等の問題から（あるいは解析実施者が施設管理担当者ではないからといった理由で）十分な地盤調査・土質試験を行うことは難しく、c)に起因する誤差は、いまだ非常に大きいと予想される。その意味で、解析結果が十分に被災や無被災を再現できなかったとしても、c)が一つの理由となることは無理からぬところである。また、実務においても、調査データの質と量の程度に依存して解析結果の精度が定まるのもやむを得ないであろう。

d)については、どちらかといえば不適切な条件設定に伴う問題であり、解析上の誤りともいえる。ただし、実際には、側方境界条件の設定など、十分な解決策が提示されていない場合もあり、必ずしも解析上の誤りとは言いつらい面もある。

最後に、e)については詳しい説明が必要となる。たとえば、FLIPでは液状化解析のパラメータを、液状化試験結果を再現できるようにパラメータフィッティングで定めている。このとき、どの程度まで要素試験を再現できるパラメータを実際の解析で用いるかは、技術者の判断に委ねられている。すなわち、要素試験結果を十分に再現できるパラメータを使うことが原則であるが、どの要素シミュレーション結果に対し、「十分」であると判断するかは工学的判断の範疇である。また、土質柱状図をもとに、土層分割を行う際にも工学的判断が関与する。このように、工学的判断に基づく処理が解析プロセスには含まれており、このときの工学的判断の良否も解析精度に影響する。

以下、実際に複数の技術者が設定したパラメータセットを用いて液状化解析を行い、パラメータの違いが解析結果に及ぼす影響についてとりまとめた例を紹介する。

解析条件として、2つの調査地の地盤情報をもとに、10人の技術者が設定した18種類のパラメータセットを用いて解析を行った。FLIPにおける各パラメータセットには、物理特性を規定するパラメータ2種類、動的変形特性を規定するパラメータ8種類および液状化特性を規定するパラメータ6種類がある。しかしここでは、このうち、技術者の工学的判断が大きく関与していると考えられる液状化特性を規定するパラメータのみを設定の対象とし、これら以外は調査地毎に共通した値を用いた。技術者の実務経験は、「5年以下」が3名、「6～10年」が3名、「11年以上」が4名である。また、FLIPの使用実績は、「はじめて」が3名、「10回以下」が1名、「11回以上」が6名である。

パラメータ設定の対象となった調査地の物性を表5-2-1に示す。各技術者には、表5-2-1に加えて液状化試験結果として図5-2-1に示す液状化強度曲線とこれらに対応する波形記録を提示した。調査地の物性は、両地点ともN値は17で、細粒分を10%程度含む砂地盤である。湿潤密度 $\gamma_t$ は調査地1では1.75g/cm<sup>3</sup>、調査地2では1.90 g/cm<sup>3</sup>で、S波速度 $V_s$ はそれぞれ152m/s、206m/sであった。また、試験技術者が設定した液状化強度曲線から求めた液状化強度 $R_{L20}$ （両振幅軸ひずみ $DA=5\%$ 、繰返し回数 $N_c=20$ で定義）は0.209、0.299であった。これらより、調査地1はやや緩い砂地盤、調査地2はやや密な砂地盤と位置づけることができる。これらの情報をもとに各技術者が設定したパラメータセットを表5-2-2

に示す。また、DA=5%のときの液状化強度曲線のフィッティング状況を図 5-2-2 に示す。調査地 1 では、繰返し回数 20 よりも小さい範囲でパラメータセット 1-6 の液状化強度曲線が異なるが、その他はほぼ一致している。

解析モデルとしてケーソン式岸壁 2 種類、矢板式岸壁および盛土の 4 種類を用いた。解析モデルの概要を図 5-2-3 に示す。紙面の都合から構造物周辺のみを図示したが、側方の境界は十分に離し、粘性境界として処理している。なお、レーレー減衰の $\beta$ 値は本来地震動毎に異なる値を用いるが、ここでは共通条件とするためケーソン式岸壁 1 と矢板式岸壁は 0.2%、ケーソン式岸壁 2 では 0.1%、盛土では 0.5%として地震動毎に共通した値を用いた。時間積分法は Wilson の $\theta$ 法 ( $\theta=1.4$ ) とした。また、時間間隔は 0.01s とした。メッシュについても各パラメータセットに対して共通したものを用いた。このように、液状化特性を規定するパラメータ以外の解析条件は共通するように設定しており、現実にある条件とは若干乖離する可能性があることに留意されたい。

図 5-2-3 のケーソン式岸壁 1 は、ケーソンの背後地盤のみを液状化層としたもので、ケーソン式岸壁 2 では、背後地盤に加えて下部地盤も液状化層としたものである。矢板式岸壁は、ケーソン式岸壁 1 と同様に背後地盤が液状化層である。盛土は、堤体下部が液状化層である。図中の斜線部で示した液状化層に表 5-2-2 に示したパラメータセットを入力して解析を行った。

入力地震動として、衝撃型地震動、振動型地震動、長時間継続型地震動の 3 種類を用いた。衝撃型地震動として、1995 年兵庫県南部地震の際にポートアイランドで観測された波形を採用した。この波形の最大加速度は 544Gal で継続時間は約 10 秒である。振動型地震動には、1968 年十勝沖地震で観測された八戸波を採用した。最大加速度は 210Gal で、継続時間は約 10 秒である。また、長時間継続型地震動には東南海・南海地震での想定波を採用した。最大加速度は 108Gal で他に比べて小さいものの、継続時間は他の 10 倍でおよそ 150 秒である。これらの地震動を、各解析モデルの水平方向に入力した。なお、本検討では FLIP Ver.3.3 相当の構成則（従来法）を用いた。

調査地 1 と調査地 2 の残留変形量の平均値の比較を図 5-2-4 に示す。構造形式によって、調査地の違いの影響度は異なるが、液状化強度の大きな調査地 2 の変形量は調査地 1 より小さく、地盤の液状化強度の違いが変形量に反映されていることがわかる。

残留変形量の平均値と変動係数の関係を図 5-2-5 に示す。変動係数の値は大きく、液状化強度曲線のフィッティングの良し悪しのわずかな違いが解析結果に大きな影響を及ぼす可能性がある。また、両者の関係は右肩下がりとなっており、平均値が大きいほど変動係数が小さくなる傾向が認められる。構造形式の違いや地震動の違いの影響を無視して議論すると、変形量が 10cm レベルの解析（イメージとしては使用性の照査に相当）では、変動係数が 1.0 程度。すなわち、倍半分程度の誤差が生じると考えられる。これに対し、変形量が 1.0m レベルの解析（イメージとしては安全性の照査に相当）では、変動係数が 0.1

程度であり、比較的ばらつきが少ない。

こういった技術者の工学的判断の影響をどのように小さくしていくかといった点は今後の課題である。

\*本稿の検討内容はFLIP研究会の活動内容ではなく、この機会に収集した検討事例である。

表 5-2-1 調査地の物性

物性値		調査地 1 11.10-12.10m	調査地 2 7.00-7.80m
	土質区分	細砂	細砂
	N 値	17	17
$\rho_t$	湿潤密度	1.75g/cm <sup>3</sup>	1.90g/cm <sup>3</sup>
$\sigma'_v$	土被り圧	120kN/m <sup>2</sup>	80 kN/m <sup>2</sup>
$V_p$	P 波速度	1410m/s	1410m/s
$V_s$	S 波速度	152m/s	206m/s
$F_c$	細粒分含有率	10%	7%
$D_{50}$	50% 粒径	0.29mm	0.36mm
$R_{L20}$	液状化強度	0.209	0.299

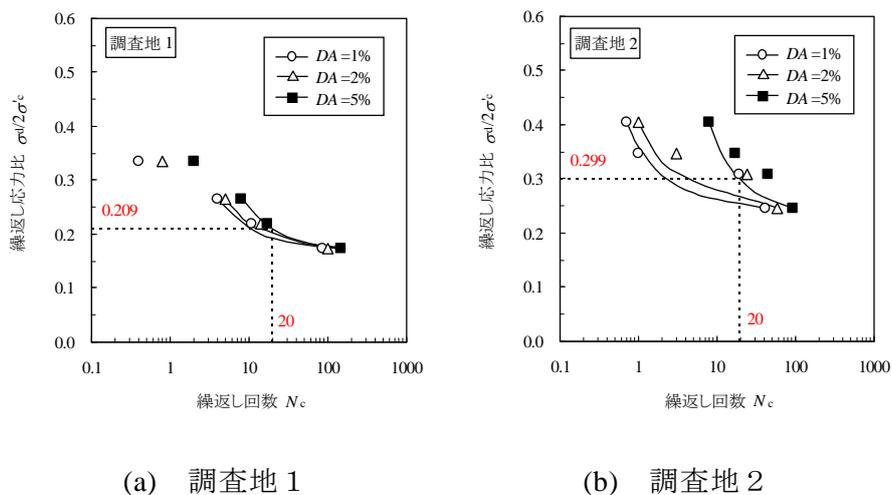
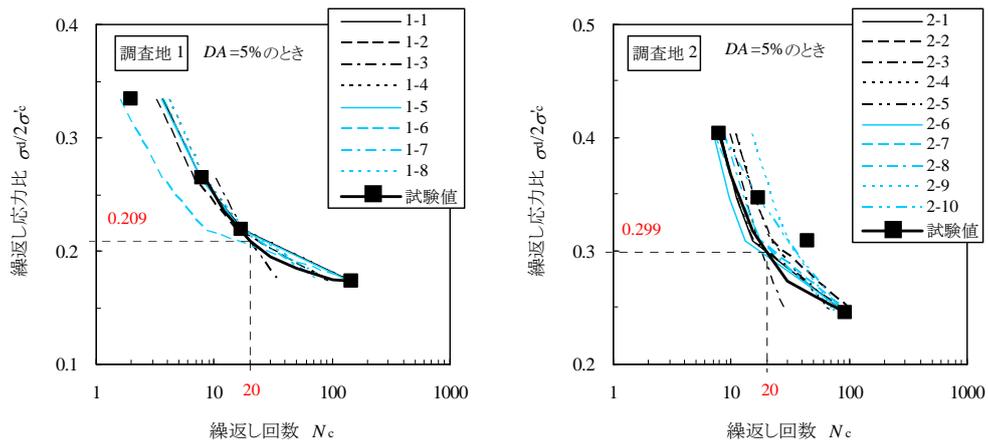


図 5-2-1 液状化強度曲線

表 5-2-2 液状化パラメータセット

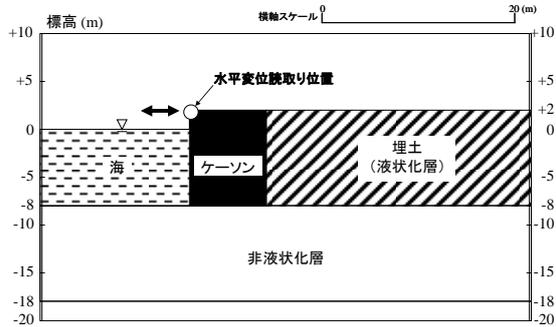
No.	$\phi'_p$	$S_1$	$w_1$	$p_1$	$p_2$	$c_1$
1-1	28	0.005	10.10	0.500	0.86	2.09
1-2	28	0.005	8.50	0.500	0.80	2.08
1-3	28	0.005	16.35	0.500	0.85	1.00
1-4	28	0.005	12.50	0.400	1.00	2.15
1-5	28	0.005	10.00	0.505	0.90	2.09
1-6	28	0.005	5.00	0.500	0.85	2.13
1-7	28	0.005	8.33	0.500	0.70	2.06
1-8	28	0.005	6.70	0.550	0.55	2.06
2-1	28	0.005	17.00	0.500	0.87	3.05
2-2	28	0.005	8.00	0.500	0.53	3.15
2-3	28	0.005	22.37	0.500	0.85	1.30
2-4	28	0.005	11.00	0.650	0.60	2.90
2-5	28	0.005	17.30	0.500	0.89	3.05
2-6	28	0.005	14.50	0.500	0.85	3.07
2-7	30	0.005	11.30	0.650	0.50	2.96
2-8	28	0.005	5.50	0.400	0.50	3.28
2-9	28	0.005	10.00	0.500	0.52	3.05
2-10	28	0.005	0.17	0.500	0.25	1.00



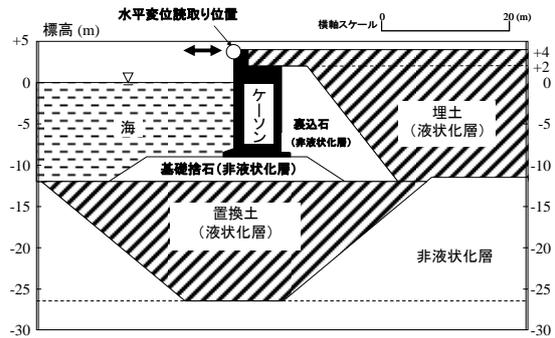
(a) 調査地 1

(b) 調査地 2

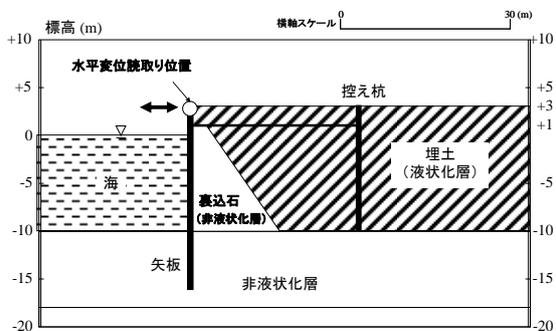
図 5-2-2 液状化強度曲線のフィッティング状況



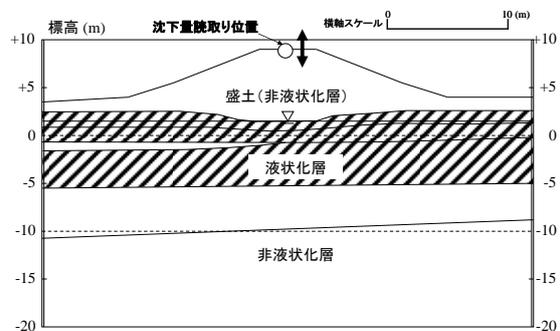
(a) ケーソン式岸壁 1



(b) ケーソン式岸壁 2



(c) 矢板式岸壁



(d) 盛土

図 5-2-3 解析対象とした構造物

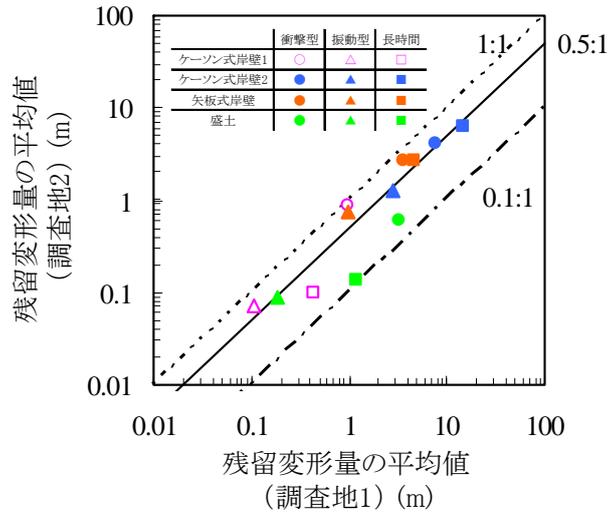


図 5-2-4 残留変形量の比較

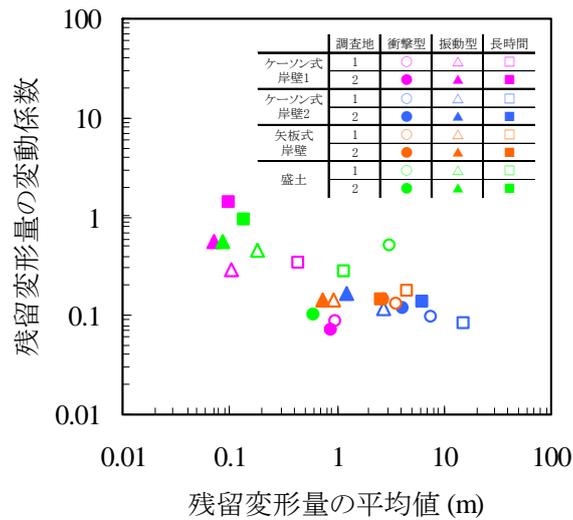


図 5-2-5 残留変形量の平均値と変動係数の関係

< 5章の参考文献 >

- 1) 港湾構造物設計事例集，平成19年改訂版，財団法人沿岸技術研究センター，2007.
- 2) 一井康二：FEMの設計での利用と方向性，土と基礎，Vol.53，No.8，pp.10-12，2005.
- 3) 一井康二，高橋宏直，中本隆，赤倉康寛：地震時における重力式岸壁の許容被災変形量の評価，日本地震工学シンポジウム論文集，Vol.10-3，pp.3241-3244，1998.

## 6. FLIPによる3次元解析

### 6-1 3次元の構成則

#### 6-1-1 積分形の構成式（応力とひずみの直接的な関係式）

3次元の構成式を導くにあたり、まず、2次元解析での多重せん断モデル構成式について簡潔に述べておく。2次元解析の場合、応力、ひずみベクトルは以下のように与えられる。

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T = (\tilde{\sigma}_x' \quad \tilde{\sigma}_y' \quad \tilde{\tau}_{xy}) \quad (6-1-1)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = (\tilde{\varepsilon}_x \quad \tilde{\varepsilon}_y \quad \tilde{\gamma}_{xy}) \quad (6-1-2)$$

なお、各記号の意味については、適宜節末の付録を参照のこと。

2次元多重せん断モデルの積分形構成式（応力とひずみの直接的な関係式）は、本資料2章もしくは既往の文献<sup>1), 2)</sup>をもとに、以下のとおり与えられる。

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' = -\tilde{p}\tilde{\mathbf{n}}^{(0)} + \sum_{i=1}^I \tilde{q}^{(i)}\tilde{\mathbf{n}}^{(i)}\Delta\omega \quad (6-1-3)$$

ここに、

$$\tilde{\mathbf{n}}^{(0)T} = (1 \quad 1 \quad 0) \quad (6-1-4)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}^{(i)T} = (\cos\omega_i \quad -\cos\omega_i \quad \sin\omega_i) \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \quad (6-1-5)$$

$$\omega_i = (i-1)\Delta\omega \quad (6-1-6)$$

$$\Delta\omega = \pi / I \quad (6-1-7)$$

であり、式(6-1-3)における等方成分 $\tilde{p}$ および仮想単純せん断応力 $\tilde{q}^{(i)}$ は、有効体積ひずみ $\tilde{\varepsilon}'$ および仮想単純せん断ひずみ $\tilde{\gamma}^{(i)}$ の関数として、以下のとおり与える。

$$\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{\varepsilon}') \quad (6-1-8)$$

$$\tilde{q}^{(i)} = \tilde{q}^{(i)}(\tilde{\gamma}^{(i)}) \quad (6-1-9)$$

ここに、有効体積ひずみ $\tilde{\varepsilon}'$ は、体積ひずみからダイレイタンスーによる体積ひずみ成分を除去したものとして、以下で与える。

$$\tilde{\varepsilon}' = \tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}_d = \tilde{\mathbf{n}}^{(0)T} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_d) \quad (6-1-10)$$

ここに、

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^T = \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_d}{2} \quad \frac{\tilde{\varepsilon}_d}{2} \quad 0 \right) \quad (6-1-11)$$

また、式(6-1-9)における仮想単純せん断ひずみ $\tilde{\gamma}^{(i)}$ は、以下で与える。

$$\tilde{\gamma}^{(i)} = \tilde{\mathbf{n}}^{(i)T} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_d) = \tilde{\mathbf{n}}^{(i)T} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6-1-12)$$

以上により、式(6-1-3)の両辺の微分をとれば、2次元解析における多重せん断モデルの増分形構成式が以下のとおり導かれる。

$$d\tilde{\sigma}' = -d\tilde{p}\tilde{\mathbf{n}}^{(0)} + \sum_{i=1}^I d\tilde{q}^{(i)}\tilde{\mathbf{n}}^{(i)}\Delta\omega \quad (6-1-13)$$

ここに、

$$d\tilde{p} = \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{\varepsilon}'} d\tilde{\varepsilon}' \quad (6-1-14)$$

$$d\tilde{q}^{(i)} = \frac{\partial\tilde{q}^{(i)}}{\partial\tilde{\gamma}^{(i)}} d\tilde{\gamma}^{(i)} \quad (6-1-15)$$

式(6-1-14)(6-1-15)を式(6-1-13)に代入すると、以下のようになる。

$$d\tilde{\sigma}' = \tilde{\mathbf{D}}(d\tilde{\varepsilon} - d\tilde{\varepsilon}_d) \quad (6-1-16)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = K_{LU}\tilde{\mathbf{n}}^{(0)}\tilde{\mathbf{n}}^{(0)T} + \sum_{i=1}^I G_{LU}^{(i)}\tilde{\mathbf{n}}^{(i)}\tilde{\mathbf{n}}^{(i)T}\Delta\omega \quad (6-1-17)$$

ここに、

$$K_{LU} = -\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{\varepsilon}'} \quad (6-1-18)$$

$$G_{LU}^{(i)} = \frac{\partial\tilde{q}^{(i)}}{\partial\tilde{\gamma}^{(i)}} \quad (6-1-19)$$

さて、3次元解析における多重せん断モデル構成式の導出の方向性として、まず、式(6-1-3)および式(6-1-16)に示す2次元解析での多重せん断モデル構成式が、xyz直交座標系で規定された3次元空間において、z軸に垂直な2次元平面(x-y平面)上で成立するものとする。これをz軸まわりの仮想平面ひずみ状態での多重せん断機構と呼ぶことにする。次に、座標系を回転させることによりz軸として任意の方向を考えると、この任意軸まわりの仮想平面ひずみ状態での多重せん断機構を重ね合わせることにより、3次元空間における多重せん断モデルが構築されることとなる。砂のような粒状体においては、連続体としてのマクロ的な応力を粒子間のミクロ的な接触力に関連付けることができる。あるz軸に垂直な平面内での粒子間の接触力より、2次元的な構成関係を用いて仮想平面ひずみ状態におけるマクロな応力が算定されることから、この軸をあらゆる方向に回転させ、それぞれの軸に垂直な仮想平面ひずみ状態における2次元的な応力を集積することにより、3次元空間でのマクロな応力を算定することが可能となる。このことから、3次元の多重せん断モデル構成式は、以下に示す2つの階層構造を有していることがわかる。すなわち、1次元的な仮想単純せん断機構の集積として定義される2次元平面での多重せん断機構(第1の階層構造)、および、2次元平面での多重せん断機構の重ね合わせとして与えられる3次元空間における多重せん

断機構（第2の階層構造）である。

xyz直交座標系により表される3次元空間では、応力およびひずみベクトルは以下のように与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}'^T = (\sigma'_x \quad \sigma'_y \quad \sigma'_z \quad \tau'_{xy} \quad \tau'_{yz} \quad \tau'_{zx}) \quad (6-1-20)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'^T = (\varepsilon'_x \quad \varepsilon'_y \quad \varepsilon'_z \quad \gamma'_{xy} \quad \gamma'_{yz} \quad \gamma'_{zx}) \quad (6-1-21)$$

ここで、任意の軸まわりの仮想平面ひずみ状態での多重せん断機構を考慮するため、新たに  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  直交座標系を導入する。なお、新たに設けた  $\tilde{y}$  軸は元の  $x-y$  平面に平行になるよう設定し、両座標系において原点は共通とする。 $xyz$  座標系において式(6-1-20)(6-1-21)により表される応力、ひずみベクトルは、新たな座標系  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  のもとでは、座標変換マトリクスを用いて以下のように表すことができる<sup>3)</sup>。

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma}' \quad (6-1-22)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{T}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6-1-23)$$

ここに、 $\mathbf{T}_\sigma$  は応力成分に関する座標変換マトリクス、 $\mathbf{T}_\varepsilon$  はひずみ成分に関する座標変換マトリクスであり、以下のような関係がある。

$$\mathbf{T}_\varepsilon^{-1} = \mathbf{T}_\sigma^T, \quad \mathbf{T}_\sigma^{-1} = \mathbf{T}_\varepsilon^T \quad (6-1-24)$$

3次元解析における多重せん断モデルの積分形構成式(応力とひずみの直接的な関係式)は、式(6-1-3)に示す2次元解析での多重せん断モデルの積分形構成式が、3次元空間において単位球を立体角  $\Delta\Omega$  ごとに分割した  $J$  個の各サブプレーンに対して定義されるものとし、2次元平面ひずみ状態におけるそれぞれの多重せん断機構の影響を3次元空間で集積することにより与えるものとする。ここで、新たに設けた  $\tilde{z}$  軸に垂直な  $\tilde{x}-\tilde{y}$  平面が  $j$  番目のサブプレーンであるとすると、式(6-1-3)にならい、この2次元平面における応力とひずみの直接的な構成関係は以下のように書くことができる。

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)} = -\tilde{p}^{(j)} \tilde{\mathbf{n}}^{(0)} + \sum_{i=1}^I \tilde{q}^{(ij)} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \Delta\omega \quad (6-1-25)$$

ここに、 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}$  は、 $j$  番目のサブプレーン ( $\tilde{x}-\tilde{y}$  平面) における2次元平面ひずみ状態での応力である。また、 $\tilde{\mathbf{n}}^{(0)}$ ,  $\tilde{\mathbf{n}}^{(i)}$  は、式(6-1-3)の場合と同様に式(6-1-4)(6-1-5)により与える。

さて、式(6-1-25)の左辺の  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}$  は、 $\tilde{x}-\tilde{y}$  平面における2次元的な3成分の応力ベクトルであり、これを3次元空間における  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  座標系での6成分の応力ベクトル  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}$  に変換するため、以下に示す変換マトリクス  $\mathbf{T}_E$  を導入する。

$$\mathbf{T}_E^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6-1-26)$$

式(6-1-25)に対して、左から式(6-1-26)に示す変換マトリクス  $\mathbf{T}_E$  を乗じると、次式のようになる。

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)} = \mathbf{T}_E \boldsymbol{\sigma}^{(j)} = -\tilde{p}^{(j)} \mathbf{T}_E \tilde{\mathbf{n}}^{(0)} + \sum_{i=1}^I \tilde{q}^{(ij)} \mathbf{T}_E \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \Delta\omega \quad (6-1-27)$$

さらに、式(6-1-27)における  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  座標系で表された応力ベクトル  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}$  を、式(6-1-22)を用いて  $xyz$  座標系で表された応力ベクトル  $\boldsymbol{\sigma}^{(j)}$  に変換すると、以下のような関係式が得られる。

$$\boldsymbol{\sigma}^{(j)} = \left(\mathbf{T}_\sigma^{(j)}\right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)} = -\tilde{p}^{(j)} \mathbf{T}_\sigma^{(j)\text{T}} \mathbf{T}_E \tilde{\mathbf{n}}^{(0)} + \sum_{i=1}^I \tilde{q}^{(ij)} \mathbf{T}_\sigma^{(j)\text{T}} \mathbf{T}_E \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \Delta\omega \quad (6-1-28)$$

ここに、式(6-1-24)を用いた。

式(6-1-28)は、3次元空間における直接的な応力-ひずみ関係であるものの、この構成関係には  $j$  番目のサブプレーンにおける多重せん断機構の影響しか含まれていない。3次元空間における多重せん断モデル構成式は、単位球を立体角  $\Delta\Omega$  ごとに分割した  $J$  個の各サブプレーンにおける仮想平面ひずみ状態での多重せん断機構の集積により与えられることから、式(6-1-28)をもとにして、3次元での積分形構成式が以下のように与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J p^{(j)} \mathbf{n}^{(0j)} \Delta\Omega + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I q^{(ij)} \mathbf{n}^{(ij)} \Delta\omega \Delta\Omega \quad (6-1-29)$$

ここに、

$$\mathbf{n}^{(0j)} = \mathbf{T}_\varepsilon^{(j)\text{T}} \mathbf{T}_E \tilde{\mathbf{n}}^{(0)} \quad (\text{for } j=1, \dots, J) \quad (6-1-30)$$

$$\mathbf{n}^{(ij)} = \mathbf{T}_\varepsilon^{(j)\text{T}} \mathbf{T}_E \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \quad (\text{for } i=1, \dots, I; j=1, \dots, J) \quad (6-1-31)$$

さらに、体積変化が等方的であると仮定すると、3次元解析における多重せん断モデルの積分形構成式が最終的に以下のように導かれる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p \mathbf{n}^{(0)} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I q^{(ij)} \mathbf{n}^{(ij)} \Delta\omega \Delta\Omega \quad (6-1-32)$$

ここに、

$$\mathbf{n}^{(0)\text{T}} = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (6-1-33)$$

式(6-1-32)における等方成分  $p$  および仮想単純せん断応力  $q^{(ij)}$  は、式(6-1-8)(6-1-9)に示す2次元解析の場合と同様に、有効体積ひずみ  $\varepsilon'$ 、仮想単純せん断ひずみ  $\gamma^{(ij)}$  の関数として、以下のとおり与えられる。

$$p = p(\varepsilon') \quad (6-1-34)$$

$$q^{(ij)} = q^{(ij)}(\gamma^{(ij)}, S, J_2, \theta) \quad (6-1-35)$$

なお、実際には、式(6-1-35)に示すように、仮想単純せん断応力  $q^{(ij)}$  は液状化解析における状態変数  $S$ 、さらに、3次元解析で導入される偏差応力第2不変量  $J_2$  と Lode 角  $\theta$  に

も依存する。

さて、式(6-1-34)における有効体積ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}'$  は、2次元解析での式(6-1-10)と同様に、体積ひずみからダイレイタンスによる体積ひずみ成分を除去したものととして以下で与える。

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d = \mathbf{n}^{(0)T} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d) \quad (6-1-36)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d^T = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_d}{3} & \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_d}{3} & \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_d}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6-1-37)$$

また、仮想単純せん断ひずみ  $\boldsymbol{\gamma}^{(ij)}$  は、2次元解析における式(6-1-12)と同様に、次式により与える。

$$\boldsymbol{\gamma}^{(ij)} = \mathbf{n}^{(ij)T} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d) = \mathbf{n}^{(ij)T} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6-1-38)$$

### 6-1-2 増分形の構成式

増分形の構成式に関しても、定式化の方向性は 6-1-1 で述べた積分形の構成式と同様である。すなわち、式(6-1-16)に示す 2次元解析での増分形構成式が、3次元空間において単位球を立体角  $\Delta\Omega$  ごとに分割した  $J$  個の各サブプレーンに対して定義されるものとし、それらを 3次元空間で集積することにより 3次元解析での増分形構成式を与えるものとする。7.1-1 において新たに設けた  $\tilde{z}$  軸に垂直な  $\tilde{x}-\tilde{y}$  平面が  $j$  番目のサブプレーンであるとする、式(6-1-16)(6-1-17)にならぬ、この 2次元平面における応力とひずみの増分関係は以下のように書くことができる。

$$d\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)} = \tilde{\mathbf{D}} (d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(j)} - d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^{(j)}) \quad (6-1-39)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = K_{LU}^{(j)} \tilde{\mathbf{n}}^{(0)} \tilde{\mathbf{n}}^{(0)T} + \sum_{i=1}^I G_{LU}^{(ij)} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)T} \Delta\omega \quad (6-1-40)$$

ここに、 $d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(j)}$  は、 $j$  番目のサブプレーン ( $\tilde{x}-\tilde{y}$  平面) における 2次元的なひずみ増分であり、式(6-1-23)および式(6-1-26)を用いて、以下のように表される。

$$d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(j)} = \mathbf{T}_E^T d\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} = \mathbf{T}_E^T \mathbf{T}_\varepsilon^{(j)} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (6-1-41)$$

ここに、 $\mathbf{T}_E^T$  は、3次元空間 ( $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  座標系) における 6成分を有するひずみベクトル  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  を、2次元 ( $\tilde{x}-\tilde{y}$ ) 平面における 3成分のひずみベクトル  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  に変換する働きを有する。

さて、式(6-1-39)の左辺の  $d\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}$  は、 $\tilde{x}-\tilde{y}$  平面における 2次元的な 3成分の応力ベクトル増分であり、これを 3次元空間における  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  座標系での 6成分の応力ベクトル増分  $d\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}$  に変換するためには、式(6-1-27)にならぬ、式(6-1-39)に対して左から変換マトリクス  $\mathbf{T}_E$  を乗じればよい。すなわち、以下のようなになる。

$$\begin{aligned} d\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)} &= \mathbf{T}_E d\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)} \\ &= \left( K_{LU}^{(j)} \mathbf{T}_E \tilde{\mathbf{n}}^{(0)\text{T}} \tilde{\mathbf{n}}^{(0)} \mathbf{T}_E^{\text{T}} \mathbf{T}_\varepsilon^{(j)} + \sum_{i=1}^I G_{LU}^{(ij)} \mathbf{T}_E \tilde{\mathbf{n}}^{(i)\text{T}} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \mathbf{T}_E^{\text{T}} \mathbf{T}_\varepsilon^{(j)} \Delta\omega \right) (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}_d) \end{aligned} \quad (6-1-42)$$

ここに、式(6-1-41)を用いた。

さらに、式(6-1-42)における  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  座標系で表された応力ベクトル増分  $d\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}$  を、式(6-1-22)を用いて  $xyz$  座標系で表された応力ベクトル増分  $d\boldsymbol{\sigma}^{(j)}$  に変換すると、以下のような関係が得られる。

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma}^{(j)} &= \left( \mathbf{T}_\sigma^{(j)} \right)^{-1} d\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)} \\ &= \left( K_{LU}^{(j)} \mathbf{T}_\varepsilon^{(j)\text{T}} \mathbf{T}_E \tilde{\mathbf{n}}^{(0)\text{T}} \tilde{\mathbf{n}}^{(0)} \mathbf{T}_E^{\text{T}} \mathbf{T}_\varepsilon^{(j)} + \sum_{i=1}^I G_{LU}^{(ij)} \mathbf{T}_\varepsilon^{(j)\text{T}} \mathbf{T}_E \tilde{\mathbf{n}}^{(i)\text{T}} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \mathbf{T}_E^{\text{T}} \mathbf{T}_\varepsilon^{(j)} \Delta\omega \right) (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}_d) \end{aligned} \quad (6-1-43)$$

ここに、式(6-1-24)を用いた。

式(6-1-43)は、3次元空間における応力、ひずみの増分関係であるものの、この構成関係には  $j$  番目のサブプレーンにおける多重せん断機構の影響しか含まれていない。3次元空間における多重せん断モデル構成式は、単位球を立体角  $\Delta\Omega$  ごとに分割した  $J$  個の各サブプレーンにおける平面的な多重せん断機構の集積により与えられることから、式(6-1-43)をもとにして、3次元での増分形構成式が以下のように与えられる。

$$d\boldsymbol{\sigma}' = \left( \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J K_{LU}^{(j)} \mathbf{n}^{(0j)\text{T}} \mathbf{n}^{(0j)} \Delta\Omega + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I G_{LU}^{(ij)} \mathbf{n}^{(ij)\text{T}} \mathbf{n}^{(ij)} \Delta\omega \Delta\Omega \right) (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}_d) \quad (6-1-44)$$

ここに、

$$\mathbf{n}^{(0j)} = \mathbf{T}_\varepsilon^{(j)\text{T}} \mathbf{T}_E \tilde{\mathbf{n}}^{(0)} \quad (\text{for } j=1, \dots, J) \quad (6-1-45)$$

$$\mathbf{n}^{(ij)} = \mathbf{T}_\varepsilon^{(j)\text{T}} \mathbf{T}_E \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \quad (\text{for } i=1, \dots, I; j=1, \dots, J) \quad (6-1-46)$$

さらに、体積変化が等方的であると仮定すると、最終的に、3次元解析における多重せん断モデルの増分形構成式が以下のように導かれる。

$$d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D} (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}_d) \quad (6-1-47)$$

ここに、

$$\mathbf{D} = K_{LU} \mathbf{n}^{(0)\text{T}} \mathbf{n}^{(0)} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I G_{LU}^{(ij)} \mathbf{n}^{(ij)\text{T}} \mathbf{n}^{(ij)} \Delta\omega \Delta\Omega \quad (6-1-48)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{\text{T}} = \begin{pmatrix} \frac{d\varepsilon_d}{3} & \frac{d\varepsilon_d}{3} & \frac{d\varepsilon_d}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6-1-49)$$

$$\mathbf{n}^{(0)\text{T}} = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (6-1-50)$$

$$\mathbf{n}^{(ij)} = \mathbf{T}_\varepsilon^{(j)\text{T}} \mathbf{T}_E \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \quad (\text{for } i=1, \dots, I; j=1, \dots, J) \quad (6-1-31) : \text{再掲}$$

$$\tilde{\mathbf{n}}^{(i)T} = (\cos \omega_i \quad -\cos \omega_i \quad \sin \omega_i) \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \quad (6-1-5) : \text{再掲}$$

$$\mathbf{T}_E^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6-1-26) : \text{再掲}$$

$$\mathbf{n}^{(ij)T} \mathbf{n}^{(0)} = n_1^{(ij)} + n_2^{(ij)} + n_3^{(ij)} = 0 \quad (6-1-51)$$

$$K_{LU} = -\frac{dp}{d\varepsilon'} \quad (6-1-52)$$

$$G_{LU}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} \quad (6-1-53)$$

$$\varepsilon' = \mathbf{n}^{(0)T} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d) \quad (6-1-36) : \text{再掲}$$

$$\gamma^{(ij)} = \mathbf{n}^{(ij)T} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d) = \mathbf{n}^{(ij)T} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6-1-38) : \text{再掲}$$

なお、式(6-1-47)は、式(6-1-32)に示す 3次元解析での積分形構成式の両辺を微分することにより求めることも可能である。

### 6-1-3 仮想単純せん断応力の定式化

2次元解析における仮想単純せん断機構の定式化に基づき、式(6-1-32)における仮想単純せん断応力  $q^{(ij)}$  を、以下のような双曲線型で与える。

$$q^{(ij)} = \frac{\gamma^{(ij)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(ij)} / \gamma_v|} q_v \quad (6-1-54)$$

ここに、 $q_v, \gamma_v$  は、仮想単純せん断機構におけるせん断強度、(せん断) 規準ひずみである。

仮想単純せん断機構が履歴ループに入った際には、拡張 Masing 則を用いることとする。すなわち、履歴ループに入った際の仮想単純せん断ひずみ  $\gamma^{(ij)}$  に応じ、妥当な履歴減衰を表現できるよう定められたパラメータ  $\xi, \zeta$  を用いて、以下のように正規化を行う。

$$\tilde{q}^{(ij)} = \frac{q^{(ij)} / q_v}{\zeta} \quad (6-1-55)$$

$$\tilde{\gamma}^{(ij)} = \frac{\gamma^{(ij)} / \gamma_v}{\xi} \quad (6-1-56)$$

これらを用いて、履歴ループ内での仮想単純せん断応力は、以下のとおり与えられる<sup>4)</sup>。

$$\frac{\tilde{q}^{(ij)} - \tilde{q}_r^{(ij)}}{2\delta} = \frac{\tilde{\gamma}^{(ij)} - \tilde{\gamma}_r^{(ij)}}{1 + \left| \frac{\tilde{\gamma}^{(ij)} - \tilde{\gamma}_r^{(ij)}}{2\delta} \right|} \quad (6-1-57)$$

式(6-1-54)および式(6-1-57)を式(6-1-53)に代入すると、せん断剛性が以下のように与えられる。

骨格曲線上：

$$G_L^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} = \frac{1}{\left(1 + \left|\gamma^{(ij)} / \gamma_v\right|\right)^2} \frac{q_v}{\gamma_v} \quad (6-1-58)$$

履歴ループ上：

$$G_{LU}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} = \frac{1}{\left(1 + \left|\frac{\tilde{\gamma}^{(ij)} - \tilde{\gamma}_r^{(ij)}}{2\delta}\right|\right)^2} \frac{\zeta q_v}{\xi \gamma_v} \quad (6-1-59)$$

#### 6-1-4 三軸せん断における仮想単純せん断機構

(1) 三軸せん断での仮想単純せん断ひずみ

拘束圧一定条件での三軸せん断において、 $x$ 軸を最大主応力の方向と一致させると、連続体としてのマクロな応力、ひずみは以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \sigma'_y &= \sigma'_z \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z \\ \frac{1}{3}(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) &= \sigma'_{m0} \\ \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z &= \varepsilon_{m0} \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (6-1-60)$$

ここに、 $\sigma'_{m0}$ 、 $\varepsilon_{m0}$ は、初期有効拘束圧および初期体積ひずみである。

式(6-1-60)を式(6-1-38)に代入すると、

$$\begin{aligned} \gamma^{(ij)} &= n_1^{(ij)} \varepsilon_x + n_2^{(ij)} \varepsilon_y + n_3^{(ij)} \varepsilon_z \\ &= \left( n_1^{(ij)} - \frac{1}{2}(n_2^{(ij)} + n_3^{(ij)}) \right) \varepsilon_x + \frac{1}{2}(n_2^{(ij)} + n_3^{(ij)}) \varepsilon_{m0} \end{aligned} \quad (6-1-61)$$

となる。さらに、式(6-1-51)を適用すると、三軸せん断における仮想単純せん断ひずみが軸ひずみにより以下のように表される。

$$\gamma^{(ij)} = \frac{3}{2} n_1^{(ij)} \varepsilon_x - \frac{1}{2} n_1^{(ij)} \varepsilon_{m0} = n_1^{(ij)} (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \quad (6-1-62)$$

(2) 三軸せん断に対するせん断剛性

拘束圧一定条件での三軸せん断では、連続体としてのマクロなせん断剛性  $G_m$  は次式により規定される。

$$d\left(\frac{\sigma'_x - \sigma'_y}{2}\right) = G_m d(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \quad (6-1-63)$$

さて、軸差ひずみが非常に小さい場合 ( $\varepsilon_x - \varepsilon_y \approx 0$ )、仮想単純せん断機構における骨格曲線上のせん断剛性は、式(6-1-58)より以下のように与えられる。

$$G_L^{(ij)} = \frac{q_v}{\gamma_v} \quad (6-1-64)$$

ここで、式(6-1-62)(6-1-64)を式(6-1-47)に示す多重せん断モデルの増分形構成式に代入し、 $x$ 成分から $y$ 成分を減ずると、次式が得られる。

$$d\left(\frac{\sigma'_x - \sigma'_y}{2}\right) = \left[ \frac{q_v}{\gamma_v} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} (n_1^{(ij)} - n_2^{(ij)}) n_1^{(ij)} \Delta\omega\Delta\Omega \right] d(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \quad (6-1-65)$$

式(6-1-63)と式(6-1-65)を比較すると、せん断剛性  $G_m$  が以下のように導かれる。

$$G_m = \frac{q_v}{\gamma_v} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} (n_1^{(ij)} - n_2^{(ij)}) n_1^{(ij)} \Delta\omega\Delta\Omega \quad (6-1-66)$$

### (3) 三軸せん断に対するせん断強度

三軸せん断におけるせん断強度  $\tau_m^{\text{tri}}$  は、軸差ひずみが限りなく大きいとした場合 ( $\varepsilon_x - \varepsilon_y = \infty$ ) の軸差応力を用い、以下のように与えられる。

$$\tau_m^{\text{tri}} = \frac{\sigma'_x - \sigma'_y}{2} \quad (6-1-67)$$

さて、式(6-1-62)を式(6-1-54)に適用し、 $\varepsilon_x - \varepsilon_y = \infty$ と仮定すると、三軸せん断における仮想単純せん断応力  $q^{(ij)}$  は以下のように書ける。

$$q^{(ij)} = \text{sgn}(n_1^{(ij)}) q_v \quad (6-1-68)$$

また、式(6-1-60)を式(6-1-32)に示す多重せん断モデルの積分形構成式に代入すると、

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma'_{m0} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I q^{(ij)} n_1^{(ij)} \Delta\omega\Delta\Omega \\ \sigma'_y &= \sigma'_{m0} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I q^{(ij)} n_2^{(ij)} \Delta\omega\Delta\Omega \end{aligned} \quad (6-1-69)$$

となる。これらに式(6-1-68)を代入すると、次式が得られる。

$$\frac{\sigma'_x - \sigma'_y}{2} = q_v \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} (n_1^{(ij)} - n_2^{(ij)}) \text{sgn}(n_1^{(ij)}) \Delta\omega\Delta\Omega \quad (6-1-70)$$

ここで、式(6-1-67)と式(6-1-70)を比較すると、三軸せん断におけるせん断強度が以下のように与えられる。

$$\tau_m^{\text{tri}} = q_v \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} (n_1^{(ij)} - n_2^{(ij)}) \text{sgn}(n_1^{(ij)}) \Delta\omega\Delta\Omega \quad (6-1-71)$$

(4) 仮想単純せん断機構におけるせん断強度、規準ひずみ

式(6-1-66)(6-1-71)より、仮想単純せん断機構におけるせん断強度および（せん断）規準ひずみは、三軸せん断におけるせん断強度  $\tau_m^{\text{tri}}$  およびせん断剛性  $G_m$  を用いて以下のよう表される。

$$q_v = \frac{\tau_m^{\text{tri}}}{\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} (n_1^{(ij)} - n_2^{(ij)}) \text{sgn}(n_1^{(ij)}) \Delta\omega\Delta\Omega} \quad (6-1-72)$$

$$\gamma_v = \left( \frac{\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} (n_1^{(ij)} - n_2^{(ij)}) n_1^{(ij)} \Delta\omega\Delta\Omega}{\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} (n_1^{(ij)} - n_2^{(ij)}) \text{sgn}(n_1^{(ij)}) \Delta\omega\Delta\Omega} \right) \gamma_m^{\text{tri}} \quad (6-1-73)$$

ここに、 $\gamma_m^{\text{tri}}$  は三軸せん断に対する（せん断）規準ひずみで、以下で与えられる。

$$\gamma_m^{\text{tri}} = \frac{\tau_m^{\text{tri}}}{G_m} \quad (6-1-74)$$

### 6-1-5 単純せん断における仮想単純せん断機構

(1) 単純せん断での仮想単純せん断ひずみ

$x-y$  平面内における単純せん断を考えると、連続体としてのマクロな応力、ひずみは以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (6-1-75)$$

式(6-1-75)を式(6-1-38)に代入すると、単純せん断における仮想単純せん断ひずみが次式で与えられる。

$$\gamma^{(ij)} = n_4^{(ij)} \gamma_{xy} \quad (6-1-76)$$

(2) 単純せん断に対するせん断剛性

$x-y$  平面内における単純せん断では、連続体としてのマクロなせん断剛性  $G_m$  は次式により規定される。

$$d\tau_{xy} = G_m d\gamma_{xy} \quad (6-1-77)$$

さて、せん断ひずみが非常に小さい場合（ $\gamma_{xy} \approx 0$ ）、仮想単純せん断機構における骨格曲線上のせん断剛性は、式(6-1-58)より以下のように与えられる。

$$G_L^{(ij)} = \frac{q_v}{\gamma_v} \quad (6-1-78)$$

ここで、式(6-1-76)(6-1-78)を式(6-1-47)に示す多重せん断モデルの増分形構成式に代入すると、次式が得られる。

$$d\tau_{xy} = \left[ \frac{q_v}{\gamma_v} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (n_4^{(ij)})^2 \Delta\omega\Delta\Omega \right] d\gamma_{xy} \quad (6-1-79)$$

式(6-1-77)と式(6-1-79)を比較すると、せん断剛性  $G_m$  が以下のように導かれる。

$$G_m = \frac{q_v}{\gamma_v} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (n_4^{(ij)})^2 \Delta\omega\Delta\Omega \quad (6-1-80)$$

### (3) 単純せん断に対するせん断強度

単純せん断 ( $x-y$  平面) におけるせん断強度  $\tau_m^{ps}$  は、せん断ひずみが限りなく大きいとした場合 ( $\gamma_{xy} = \infty$ ) のせん断応力を用い、以下のように与えられる。

$$\tau_m^{ps} = \tau_{xy} \quad (6-1-81)$$

さて、式(6-1-76)を式(6-1-54)に適用し、 $\gamma_{xy} = \infty$  と仮定すると、単純せん断における仮想単純せん断応力  $q^{(ij)}$  は以下のように書ける。

$$q^{(ij)} = \text{sgn}(n_4^{(ij)}) q_v \quad (6-1-82)$$

また、式(6-1-75)を式(6-1-32)に示す多重せん断モデルの積分形構成式に代入すると、

$$\tau_{xy} = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I q^{(ij)} n_4^{(ij)} \Delta\omega\Delta\Omega \quad (6-1-83)$$

となる。これに式(6-1-82)を代入すると、次式が得られる。

$$\tau_{xy} = q_v \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I |n_4^{(ij)}| \Delta\omega\Delta\Omega \quad (6-1-84)$$

ここで、式(6-1-81)と式(6-1-84)を比較すると、単純せん断におけるせん断強度が以下のとおり与えられる。

$$\tau_m^{ps} = q_v \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I |n_4^{(ij)}| \Delta\omega\Delta\Omega \quad (6-1-85)$$

### (4) 仮想単純せん断機構におけるせん断強度、規準ひずみ

式(6-1-80)(6-1-85)より、仮想単純せん断機構におけるせん断強度および(せん断)規準ひずみは、単純せん断におけるせん断強度  $\tau_m^{ps}$  およびせん断剛性  $G_m$  を用いて以下のよう表される。

$$q_v = \frac{\tau_m^{ps}}{\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I |n_4^{(ij)}| \Delta\omega\Delta\Omega} \quad (6-1-86)$$

$$\gamma_v = \left( \frac{\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (n_4^{(ij)})^2 \Delta\omega\Delta\Omega}{\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I |n_4^{(ij)}| \Delta\omega\Delta\Omega} \right) \gamma_m^{\text{ps}} \quad (6-1-87)$$

ここに、 $\gamma_m^{\text{ps}}$  は単純せん断に対する（せん断）規準ひずみで、以下で与えられる。

$$\gamma_m^{\text{ps}} = \frac{\tau_m^{\text{ps}}}{G_m} \quad (6-1-88)$$

### 6-1-6 破壊基準

式(6-1-71)および式(6-1-85)より、多重せん断モデルにおいては、仮想単純せん断機構におけるミクロ的なレベルでの破壊基準が、必ずしも連続体としてのマクロ的なレベルでの破壊基準とは一致しない。ここでは、仮想単純せん断機構におけるせん断強度  $q_v$  および（せん断）規準ひずみ  $\gamma_v$  と、マクロ的な破壊基準とを関連付けながら、式(6-1-72)におけるせん断強度  $\tau_m^{\text{mi}}$  を規定することにより、Tresca 基準、Von Mises 基準、Mohr-Coulomb 基準など各種の破壊基準を導入する。

#### (1) Mohr-Coulomb の破壊基準

マクロ的なレベルでの Mohr-Coulomb の破壊基準は、以下のとおり与えられる<sup>5)</sup>。

$$\left( c \cot \phi_f - \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} \right) \sin \phi_f = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \quad (6-1-89)$$

このとき、せん断応力比は、偏差応力の第2不変量  $J_2$  を用いて、以下のように与えられる。

$$\frac{\tau}{c \cot \phi_f - \sigma'_m} = \frac{(\sigma'_1 - \sigma'_3)/2}{c \cot \phi_f - \sigma'_m} = \frac{\sqrt{J_2} \cos \theta}{c \cot \phi_f - (I_1/3)} \quad (6-1-90)$$

したがって、式(6-1-90)に式(6-1-89)を適用することにより、Mohr-Coulomb の破壊基準は以下のように書くことができる。

$$\frac{\sqrt{J_2} \cos \theta}{c \cot \phi_f - (I_1/3)} = \frac{c \cot \phi_f - (\sigma'_1 + \sigma'_3)/2}{c \cot \phi_f - (I_1/3)} \sin \phi_f \equiv m_1^{\text{MC}}(\theta) \quad (6-1-91)$$

ここに、式(6-1-91)における  $m_1^{\text{MC}}(\theta)$  は、破壊面での応力点の位置に応じて以下のような値をとる。

三軸引張の場合：

$$m_1^{\text{MC}} \left( -\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sin \phi_f}{1 + \frac{1}{3} \sin \phi_f} \quad (6-1-92)$$

純粹せん断の場合：

$$m_1^{\text{MC}}(0) = \sin \phi_f \quad (6-1-93)$$

三軸圧縮の場合：

$$m_1^{\text{MC}}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin \phi_f}{1 - \frac{1}{3} \sin \phi_f} \quad (6-1-94)$$

さて、多重せん断モデルにおいて Mohr-Coulomb の破壊基準を採用する場合、まずは式(6-1-89)を試験的にそのまま用いて、式(6-1-72)におけるせん断強度  $\tau_m^{\text{tri}}$  を以下のように与えることとする。

$$\tau_m^{\text{tri}} = \left( c \cot \phi_f - \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} \right) \sin \phi_f \quad (6-1-95)$$

しかしながら、式(6-1-95)に示す破壊基準を用いて式(6-1-72)より仮想単純せん断機構のせん断強度を規定した場合、これにより得られるマクロ的な破壊基準は Mohr-Coulomb とはならず、次式に示すような形となる。

$$\frac{\sqrt{J_2} \cos \theta}{c \cot \phi_f - (I_1/3)} = m_1^0(\theta) \quad (6-1-96)$$

ここに、

$$m_1^0(\theta) = \frac{c \cot \phi_f - (\sigma'_1 + \sigma'_3)/2}{c \cot \phi_f - (I_1/3)} \sin \phi_f \left\{ A + (1-A) \frac{\cos \theta}{\cos(\pi/6)} \right\} \quad (6-1-97)$$

$$A = \frac{1 - (m_1^0(0) / \sin \phi_f) \cos(\pi/6)}{1 - \cos(\pi/6)} \quad (6-1-98)$$

なお、式(6-1-98)における  $m_1^0(0)$  は、以下のようにして与えられる。まず、式(6-1-71) (6-1-95)より、式(6-1-85)は以下のとおり表すことができる。

$$\tau_m^{\text{ps}} = \frac{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I |n_4^{(ij)}| \Delta \omega \Delta \Omega}{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} (n_1^{(ij)} - n_2^{(ij)}) \text{sgn}(n_1^{(ij)}) \Delta \omega \Delta \Omega} \left( c \cot \phi_f - \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} \right) \sin \phi_f \quad (6-1-99)$$

ここで、式(6-1-90)において純粋せん断 ( $\theta = 0$ ) を仮定すると、式(6-1-96)を用いて、

$$\frac{\tau_m^{\text{ps}}}{c \cot \phi_f - \sigma'_m} = \frac{\sqrt{J_2}}{c \cot \phi_f - (I_1/3)} = m_1^0(0) \quad (6-1-100)$$

となる。これに式(6-1-99)を代入すると、以下のとおり  $m_1^0(0)$  が与えられる。

$$m_1^0(0) = \frac{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I |n_4^{(ij)}| \Delta\omega\Delta\Omega}{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} (n_1^{(ij)} - n_2^{(ij)}) \operatorname{sgn}(n_1^{(ij)}) \Delta\omega\Delta\Omega} \sin\phi_f \quad (6-1-101)$$

したがって、多重せん断モデルにおいて Mohr-Coulomb の破壊基準を適用する場合、せん断強度  $\tau_m^{\text{ni}}$  は式(6-1-95)に代えて以下のように与えればよい。

$$\tau_m^{\text{ni}} = \left( c \cot\phi_f - \frac{\sigma_1' + \sigma_3'}{2} \right) \sin\phi_f \frac{m_1}{m_1^0} \quad (6-1-102)$$

ここに、

$$m_1(\theta) = \frac{c \cot\phi_f - (\sigma_1' + \sigma_3')/2}{c \cot\phi_f - (I_1/3)} \sin\phi_f \equiv m_1^{\text{MC}}(\theta) \quad (6-1-103)$$

さらに、式(6-1-102)における  $m_1(\theta)$  として、式(6-1-103)に代えて次式を用いることにより、破壊基準は拡張 Mohr-Coulomb 基準となる。

$$m_1(\theta) = \frac{c \cot\phi_f - (\sigma_1' + \sigma_3')/2}{c \cot\phi_f - (I_1/3)} \sin\phi_f \left\{ B + (1-B) \frac{\cos\theta}{\cos(\pi/6)} \right\} \quad (6-1-104)$$

ここに、

$$B = \frac{1 - (\sin\phi_f^{\text{ps}} / \sin\phi_f) \cos(\pi/6)}{1 - \cos(\pi/6)} \quad (6-1-105)$$

であり、 $\phi_f^{\text{ps}}$  は平面ひずみ条件（純粋せん断）での内部摩擦角である。

なお、 $\phi_f^{\text{ps}} = \phi_f$  とした場合、式(6-1-105)より  $B=1$  となり、式(6-1-104)が式(6-1-103)に等しくなることから、拡張 Mohr-Coulomb 基準は Mohr-Coulomb の破壊基準に還元される。

## (2) Tresca の破壊基準および Von Mises の破壊基準

マクロ的なレベルでの Tresca の破壊基準は、以下のとおり与えられる<sup>5)</sup>。

$$c = \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \quad (6-1-106)$$

また、このとき、偏差応力の第2不変量  $J_2$  を用いて、

$$\frac{\tau}{c} = \frac{(\sigma_1' - \sigma_3')/2}{c} = \frac{\sqrt{J_2} \cos\theta}{c} \quad (6-1-107)$$

の関係があるので、Tresca の破壊基準は以下のように表される。

$$\frac{\sqrt{J_2} \cos\theta}{c} = 1 \quad (6-1-108)$$

同様にして、Von Mises の破壊基準は以下のとおり与えられる。

$$\frac{\sqrt{J_2} \cos \theta}{c} = \frac{\cos \theta}{\cos(\pi/6)} \quad (6-1-109)$$

さて、多重せん断モデルにおいて Tresca の破壊基準を採用する場合、まずは式(6-1-106)を試験的にそのまま用いて、式(6-1-72)におけるせん断強度  $\tau_m^{\text{tri}}$  を以下のように与えることとする。

$$\tau_m^{\text{tri}} = c \quad (6-1-110)$$

しかしながら、式(6-1-110)に示す破壊基準を用いて式(6-1-72)より仮想単純せん断機構のせん断強度を規定した場合、これにより得られるマクロ的な破壊基準は Tresca とはならず、次式に示すような形となる。

$$\frac{\sqrt{J_2} \cos \theta}{c} = m_1^{\text{OC}}(\theta) \quad (6-1-111)$$

ここに、

$$m_1^{\text{OC}}(\theta) = A + (1-A) \frac{\cos \theta}{\cos(\pi/6)} \quad (6-1-112)$$

$$A = \frac{1 - m_1^{\text{OC}}(0) \cos(\pi/6)}{1 - \cos(\pi/6)} \quad (6-1-113)$$

なお、式(6-1-113)における  $m_1^{\text{OC}}(0)$  は、以下のようにして与えられる。まず、式(6-1-71)(6-1-110)より、式(6-1-85)は以下のとおり表すことができる。

$$\tau_m^{\text{ps}} = \frac{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I |n_4^{(ij)}| \Delta \omega \Delta \Omega}{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} (n_1^{(ij)} - n_2^{(ij)}) \text{sgn}(n_1^{(ij)}) \Delta \omega \Delta \Omega} c \quad (6-1-114)$$

ここで、式(6-1-107)において純粋せん断 ( $\theta=0$ ) を仮定すると、式(6-1-111)を用いて、

$$\frac{\tau_m^{\text{ps}}}{c} = \frac{\sqrt{J_2}}{c} = m_1^{\text{OC}}(0) \quad (6-1-115)$$

となる。これに式(6-1-114)を代入すると、以下のとおり  $m_1^{\text{OC}}(0)$  が与えられる。

$$m_1^{\text{OC}}(0) = \frac{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I |n_4^{(ij)}| \Delta \omega \Delta \Omega}{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} (n_1^{(ij)} - n_2^{(ij)}) \text{sgn}(n_1^{(ij)}) \Delta \omega \Delta \Omega} \quad (6-1-116)$$

したがって、多重せん断モデルにおいて Tresca の破壊基準を適用する場合、せん断強度  $\tau_m^{\text{tri}}$  は式(6-1-110)に代えて以下のように与えればよい。

$$\tau_m^{\text{tri}} = c \frac{m_1^{\text{C}}(\theta)}{m_1^{\text{OC}}(\theta)} \quad (6-1-117)$$

ここに、

$$m_1^c(\theta) = 1 \quad (6-1-118)$$

なお、Von Mises の破壊基準を適用する場合は、式(6-1-118)に代えて次式を用いればよい。

$$m_1^c(\theta) = \frac{\cos \theta}{\cos(\pi/6)} \quad (6-1-119)$$

式(6-1-118)(6-1-119)をまとめると、

$$m_1^c(\theta) = B + (1-B) \frac{\cos \theta}{\cos(\pi/6)} \quad (6-1-120)$$

のようになり、 $B=1$ のときは Tresca の破壊基準、 $B=0$ のときは Von Mises の破壊基準となる。

### (3) 拡張 Tresca 破壊基準および Drucker-Prager の破壊基準

前項の Tresca および Von Mises の破壊基準において、 $c \rightarrow c \cos \phi_f + p \sin \phi_f$  と置換すれば、拡張された Tresca の破壊基準 ( $B=1$ ) および Drucker-Prager の破壊基準 ( $B=0$ ) となる。

### 6-1-7 ダイレイタンスーの定式化

Zienkiewicz ら<sup>6)</sup>によれば、間隙水で満たされた多孔質体における水流の収支バランス式は以下のように書ける (詳細は、2.1 支配方程式を参照のこと)。

$$\left(k_{ij} p_{,j}\right)_{,i} - \dot{\varepsilon}_{ii} - \left(k_{ij} \rho_f g_j\right)_{,i} = -\left(k_{ij} \rho_f \ddot{u}_j\right)_{,i} + n\dot{p}/K_f \quad (6-1-121)$$

ここに、 $k_{ij}$  : 透水係数、 $p$  : 間隙水圧、 $\varepsilon_{ii}$  : 土骨格の体積ひずみ、 $\rho_f$  : 間隙水の密度、 $g$  : 重力加速度、 $n$  : 間隙率、 $K_f$  : 水の体積弾性係数である。

準静的な非排水条件下では、土粒子骨格の体積ひずみの変化は間隙水の体積変化に等しいので、式(6-1-121)において  $k_{ij} = 0$  とおくことで次式が得られる。

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = -n\dot{p}/K_f \quad (6-1-122)$$

さらに、液状化解析における初期体積ひずみを  $\varepsilon_0$  とすると、式(6-1-122)より次式が導かれる。

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = -\frac{n}{K_f}(1-S)p_0 \quad (6-1-123)$$

ここに、 $S$  は液状化の進展を規定する状態変数であり、2次元解析での定式化に準じ、せん断応力比  $r$  と液状化フロントパラメータ  $S_0$  から、以下のように与えることとする (詳細は、既往の文献<sup>1), 2)</sup>を参照のこと)。

$$S = S_0 \quad (\text{if } r \leq r_3)$$

$$S = S_2 + \sqrt{(S_0 - S_2)^2 + \left(\frac{r - r_3}{m_1}\right)^2} \quad (\text{if } r > r_3) \quad (6-1-124)$$

ここに、 $r_2 = m_2 S_0$ ,  $r_3 = m_3 S_0$ ,  $S_2 = S_0 - (r_2 - r_3) / m_1$ ,  $m_3 = 0.67 m_2$ ,  $m_2 = \sin \phi_p$  ( $\phi_p$ : 変相角) である。なお、2次元解析では  $m_1 = \sin \phi_f$  であるが、3次元解析ではこれに代えて、例えば破壊基準が拡張 Mohr-Coulomb の場合においては、式(6-1-103)により得られる値を用いることとする。

一方、小堤<sup>2)</sup>によれば、 $n_K$  を体積弾性係数の拘束圧依存性を表すパラメータとして、以下の関係が成立する。

$$S^{1-n_K} = -(1-n_K)\varepsilon' / \varepsilon_{m0} = -(1-n_K)(\varepsilon - \varepsilon_d) / \varepsilon_{m0} \quad (6-1-125)$$

ここに、 $\varepsilon_{m0}$  は、液状化解析初期の等方圧力を  $p_0$ 、基準状態（等方圧力  $p_a$ ）における体積弾性係数を  $K_a$  として、以下で与えられる。

$$\varepsilon_{m0} = p_0 / K_0 \quad (6-1-126)$$

$$K_0 = K_a \left( \frac{p_0}{p_a} \right)^{n_K} \quad (6-1-127)$$

したがって、式(6-1-123)を式(6-1-125)に代入すると、最終的にダイレイタンスーによる体積ひずみが以下のように与えられる。

$$\varepsilon_d = \frac{1}{1-n_K} S^{1-n_K} \varepsilon_{m0} - \frac{n}{K_f} (1-S) p_0 + \varepsilon_0 \quad (6-1-128)$$

## 付録 記号の表記について

### ローマ文字

$I$	2次元多重せん断モデルにおける 1/2 円あたりのばね本数
$J$	3次元多重せん断モデルにおける単位球あたりのサブプレーン数
$J_2$	3次元解析における偏差応力第2不変量
$\tilde{p}$	2次元解析における等方圧力
$p$	3次元解析における等方圧力
$\tilde{q}$	2次元解析における仮想単純せん断応力
$q$	3次元解析における仮想単純せん断応力
$q_v$	仮想単純せん断機構におけるせん断強度
$S$	液状化解析における状態変数
$S_0$	液状化解析における液状化フロントパラメータ

## ギリシャ文字

$\tilde{\gamma}$	2次元解析における仮想単純せん断ひずみ
$\gamma$	3次元解析における仮想単純せん断ひずみ
$\gamma_v$	仮想単純せん断機構における（せん断）規準ひずみ
$\gamma_m^{tri}$	三軸せん断における（せん断）規準ひずみ
$\gamma_m^{ps}$	単純せん断における（せん断）規準ひずみ
$\tilde{\varepsilon}$	2次元解析におけるひずみベクトル（土骨格）
$\varepsilon$	3次元解析におけるひずみベクトル（土骨格）
$\hat{\varepsilon}$	3次元解析における座標変換後のひずみベクトル（土骨格）
$\varepsilon'$	2次元解析における有効体積ひずみ
$\varepsilon'$	3次元解析における有効体積ひずみ
$\tilde{\varepsilon}_d$	2次元解析におけるダイレイタンシーによる体積ひずみ
$\varepsilon_d$	3次元解析におけるダイレイタンシーによる体積ひずみ
$\varepsilon_{m0}$	初期体積ひずみ
$\theta$	3次元解析における Lode 角
$\tilde{\sigma}'$	2次元解析における有効応力ベクトル
$\sigma'$	3次元解析における有効応力ベクトル
$\hat{\sigma}'$	3次元解析における座標変換後の有効応力ベクトル
$\sigma'_{m0}$	初期有効拘束圧
$\tau_m^{tri}$	三軸せん断におけるせん断強度
$\tau_m^{ps}$	単純せん断におけるせん断強度
$\phi_f^{ps}$	平面ひずみ条件での内部摩擦角
$\Delta\omega$	2次元多重せん断モデルにおけるばね間隔
$\Delta\Omega$	3次元多重せん断モデルにおける立体角

## 参考文献

- 1) Iai, S., Matsunaga, Y. and Kameoka, T.: Strain space plasticity model for cyclic mobility, *Soils and Foundations*, 32(2), pp.1-15, 1992.
- 2) 小堤治：液状化地盤上の地盤・構造物系の地震時被害推定に関する数値解析法の研究，京都大学博士学位論文，2003.
- 3) Iai, S.: Three dimensional formulation and objectivity of a strain space multiple mechanism model for sand, *Soils and Foundations*, Vol.33, No.1, pp.192-199, 1993.
- 4) Ozutsumi, O. and Iai, S.: Adjustment method of the hysteresis damping for multiple shear spring model, *Proceedings of the 4th International Conference on Recent Advances in*

- Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics (San Diego), No.1.68, 2001.
- 5) Owen, D.R.J. and Hinton, E. : Finite elements in plasticity (Theory and Practice), Pineridge Press, 1980.
- 6) Zienkiewicz, O.C. and Bettess, P. : Soil and other saturated media under transient, dynamic conditions ; general formulation and the validity various simplifying assumptions, Soil Mechanics – Transient and Cyclic Loads, John Wiley&Sons, pp.1-16, 1982.
- 7) Iai, S. : Micromechanical background to a strain space multiple mechanism model for sand, Soils and Foundations, Vol.33, No.1, pp.102-117, 1993.
- 8) Iai, S. and Ozutsumi, O. : Yield and cyclic behaviour of a strain space multiple mechanism model for granular materials, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 29(4), pp.211-240, 2005.
- 9) 第四期 FLIP 研究会事務局：液状化による構造物被害予測プログラム（3次元解析機能）FLIP3D（Ver.1.3.0）取扱説明書，2008.

## 6-2 3次元 FLIP のプログラムの概要

本節では、液状化による構造物被害予測プログラム FLIP の 3次元版（以下、FLIP3D）のプログラムの概要について、“第3期 FLIP 研究会、3次元解析 WG、平成 18 年度最終成果報告書”から引用して以下に示す。

### 6-2-1 FLIP3D のバージョンについて

現段階(H22)における FLIP 研究会の最新バージョンは、2006 年度の検討に用いられた FLIP3D (Ver.1.2.5) である。FLIP3D (Ver.1.2.5) の一つ前のバージョンは FLIP3D (Ver.1.1.5) であるが、参考として、FLIP3D (Ver.1.1.5) から FLIP3D (Ver.1.2.5) への改良内容を表 6-2-1 に示す。

表 6-2-1 FLIP3D (Ver. 1. 1. 5) から FLIP3D (Ver. 1. 2. 5) への改良内容

改良項目	内 容
解析機能	①固有値解析機能を追加
要素関係	①アイソパラメトリック非線形はり要素（一方向加振用）を追加
	②マルチスプリング要素に IGKSW（負圧を負担するか否かの S.W.）を導入
	③非線形ばね要素を追加
	④長方形板曲げ要素を追加
荷重関係	①複数の荷重区分の取扱可能にした。 ※今までは、荷重区分数を 1 に限定していた。
	②FLIP2D と同様、種々の形式の地震波ファイルを読み込み可能とした。
出力関係	①成分番号－出力成分対応表を改訂（HIST 命令）
	②時系列履歴データ組み立て処理の効率化を図った（HIST 命令）。
	③テキスト形式の時刻歴・履歴ファイル（#24, #25）の出力を可能にした（HIST 命令）。
その他	①完了状態設定ファイル（#01）を新設 ※正常終了、異常終了の別を示す内容が書き出される。
	②保持する全体行列の数を削減した（メモリ節約のため）。
	③40 番台ファイルを単精度化

## 6-2-2 機能概要

FLIP3D (Finite element analysis program for Liquefaction Process, 3D Version) は、地盤—流体—構造物の連成系を対象とした、有限要素法に基づく 3次元動的有効応力法プログラムである。

本プログラムは、土のせん断応力～せん断ひずみの非線形関係を 3次元に拡張された多重せん断ばねモデル<sup>1)2)</sup>で表現し、過剰間隙水圧モデルとしては井合のモデル<sup>3)</sup>が採用されている。多重せん断ばねモデルは、土の履歴減衰の大きさが調節可能なように、石原らが提案した履歴減衰の調節の方法<sup>4)</sup>をもとに、各ばねに適用する Masing 則を修正している<sup>5)6)</sup>。また、変位～ひずみ関係には微小ひずみ理論を用い、さらに、土の間隙水には非排水条件が課されている。

本 3次元プログラムは、地盤、海水等の流体およびケーソン等の構造部材から成る 3次元的な系を取り扱うことができる。ただし、流体には非圧縮性を仮定している。また、有限要素モデルの側方境界と底面境界を粘性境界とすることにより、側方地盤の無限性を表現することが出来る。地震波は、基盤面を一様加振することにより入力し、水平 2 方向、鉛直 1 方向の 3 方向同時加振が可能である。

支配方程式は、2次元の FLIP と同様、地盤—構造部材系の運動方程式、間隙水の収支バランス式、流体の動水圧波動伝播式の 3つである。ただし、間隙水については非排水条件を仮定しているので間隙水圧は土骨格の体積ひずみ増分で表現される。また、流体の動水圧波動伝播式は、動的解析の開始時に解を求めて、これにより流体の効果を運動方程式の付加質量に置き換えている。従って、実質的には、これらの影響を考慮に入れた地盤—構造部材系の運動方程式のみを解いている。

3次元のマルチスプリング要素と B R I C K 要素 (線形要素) の要素積分では、FLIP (2次元解析機能) と同様、SRI 法<sup>7)</sup> (Selective Reduced Integration Method) を使用することができる。

運動方程式の時間積分は Wilson $\theta$  法などの直接積分法で行い、非線形反復計算には Newton 法などを用いることができる。動的解析の他に、初期状態を与えるための自重解析などの静的解析を行うことができる。一般に、FLIP3D では、FLIP2D (FLIP の 2次元版) と同様、解析を複数のフェーズに分けて実行し (例えば、初期自重解析と地震応答解析、あるいは、初期圧密解析と非排水繰返しせん断の解析)、解析フェーズ間では、状態を引き継ぐことができる。初期自重解析で求めた初期状態は地震応答解析に引き継がれ、初期状態からの増分荷重 (地震荷重) に対する増分変位 (常時を基準とした変位) が求められる。

静的解析と動的解析は、同一の構成則に基づいて実行される。ただし、自重解析では、完全排水状態を仮定し、また、土の有効応力の初期状態を決めるために、地下水水面下の土には、浮力の影響を考慮した"水中質量密度"を与える必要がある。

本3次元プログラムは微小ひずみ理論に基づいていることから、盛土天端の沈下等、構造物の形状の非線形性に伴う荷重の変化は考慮することは出来ないことに留意する必要がある。

### 6-2-3 座標系・要素種類等

#### (1) 座標系と自由度

本プログラムでは、原則として、次図に示す座標系を用いる。

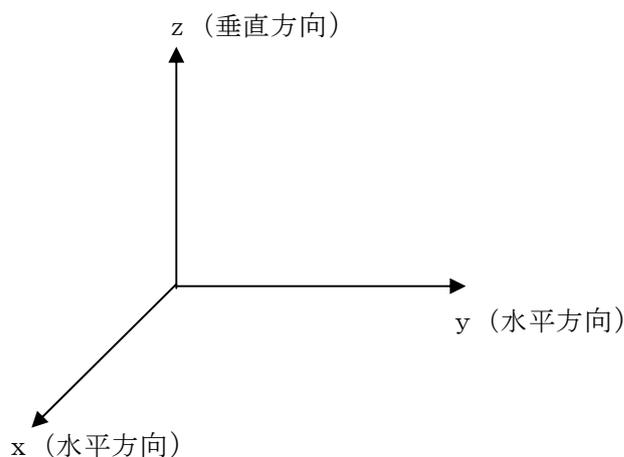


図 6-2-1 FLIP3D の座標系

この図に示すように、x軸とy軸方向を水平方向、z軸を鉛直上方とする座標は、側方粘性境界がx軸あるいはy軸に垂直でなければならず、底面粘性境界がz軸に垂直でなければならないと言う制約条件から来るもので、特に粘性境界を使用しない場合は、必ずしもこのように座標系を取る必要はない。しかしながら、マルチスプリング要素の初期自重解析の安定化のために与える  $Y_{min}$  の算定式 ( $=|AA+BB \times z|$ ) が、z座標に依存する形になっているので、この機能を使う場合には、やはり、z軸を鉛直上向きにする必要がある。

また、節点自由度としては、次の種類のものを取り扱う。

- x 方向並進変位  $U_x$
- y 方向並進変位  $U_y$
- z 方向並進変位  $U_z$
- x 軸回りの回轉變位  $R_x$
- y 軸回りの回轉變位  $R_y$
- z 軸回りの回轉變位  $R_z$
- 流体領域の流体の動水圧  $Q$

## (2) 単位系

本プログラムの単位系は無単位系である。すなわち入力、例えば kN,m 系ならば出力も kN,m 系となる。

## (3) 要素

本プログラムでは、次表に示す要素が使用可能である。

- ① 3次元の流体要素
- ② 3次元の線形はり要素
- ③ B R I C K要素 (線形)
- ④ 3次元間隙水要素
- ⑤ 3次元ジョイント要素 (FLIP3d126 で実装)
- ⑥ 側方地盤要素 (側方粘性境界)
- ⑦ 下方地盤要素 (底面粘性境界)
- ⑧ 流体-構造連成面要素
- ⑨ 3次元マルチスプリング要素
- ⑩ 板曲げ/平面応力要素
- ⑪ 線形ばね要素
- ⑫ 節点集中質量要素
- ⑬ ダンパー要素
- ⑭ 非線形はり要素
- ⑮ 非線形ばね要素

## (4) 拘束および境界条件

本プログラムでは、節点自由度に対して単点拘束 (SPC) および簡単な多点拘束 (MPC) 条件を与えることが出来る。本プログラムで使用可能な多点拘束条件は、2つまたはそれ以上の節点自由度間で変位が等しいとする拘束である。

単点拘束をした自由度に対しては、任意の強制変位を指定することが可能である。但し、流体領域の境界では、流体の動水圧として0以外の値を指定することが出来ない。

運動方程式に対しては、単点拘束により与える境界条件 (水平ローラー、鉛直ローラー) の他に、底面粘性境界および側方粘性境界を使用することが出来る。なお、地震荷重を与える場合、側方粘性境界では、自由地盤部との速度差に比例した力が加えられる。

## (5) 荷重

本プログラムでは、運動方程式において次の荷重を考慮することが出来る。

< 静的解析の場合 >

- ・ 節点集中力
- ・ 分布荷重
- ・ 重力などの静的加速度

< 動的解析の場合 >

- ・ 節点集中力
- ・ 分布荷重
- ・ 地震波（基盤一様加振）

## (6) 減衰

本プログラムでは、運動方程式の減衰は次の3つ方法により考慮される。

- ・ レーレー減衰
- ・ 粘性境界によるエネルギー逸散減衰
- ・ 非線形要素の履歴減衰

## (7) 要素積分法

FLIP2D と同じ方法<sup>7)</sup>により、3次元のマルチスプリング要素とBRICK要素（線形要素）の要素積分を対象に、SRI法（Selective Reduced Integration Method）が導入されている。偏差成分のガウス積分次数L（1～3）と平均成分のガウス積分次数LR（1～L）を指定することができる。

### 6-2-4 3次元マルチスプリング要素の構成則

3次元マルチスプリング要素は、3次元に拡張された多重せん断ばねモデル<sup>1)2)</sup>を備えている。この多重せん断ばねモデルは、三軸状態におけるせん断強度を再現するようキャリブレーションされ、さらに、それ以外のLode角において多重せん断ばねモデルが発揮するせん断強度を補正することにより、各種破壊規準に柔軟に対応することができる。FLIP3Dでは、Mohr-Coulombの破壊規準（図6-2-3参照）の他に、Tresca、Von Mises（以上、図6-2-2参照）、Drucker-Prager（図6-2-3参照）および拡張Trescaなどの破壊規準を表現することが出来る<sup>2)</sup>。また、Mohr-Coulombの破壊規準に適合するように調整された過剰間隙水圧モデルを備えている。

#### (1) Mohr-Coulombの破壊規準など

Mohr-Coulombの破壊規準は、次式で与えられる。

$$\sqrt{J_2} \cos \theta = \frac{c \cos \phi_f - \sigma'_m \sin \phi_f}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \theta \sin \phi_f} \quad (6-2-1)$$

ここに、 $J_2$ は偏差応力テンソルの第2不変量、 $\theta$ はLode角、 $c$ は粘着力、 $\phi_f$ はせん断抵抗角を表す。 $\sigma_m' = (\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3') / 3$ は平均有効応力である。また、 $c \geq 0$ 、 $\phi_f > 0$ とする。

FLIP3Dの多重せん断ばねモデルは、三軸状態で測定されたせん断強度を再現するようキャリブレーションされているので、FLIP3Dの入力パラメータは、三軸状態で測定されたせん断強度に対応する $c$ や $\phi_f$ を与える。その他のLODE角に対するせん断強度の補正を行わない場合の多重せん断ばねモデルの挙動は、例えば、平面ひずみ状態(Lode角=0度)でせん断した場合のせん断強度は、Mohr-Coulombの破壊規準に比べて大きい。これを補正するために、FLIP3Dを用いる際には、平面ひずみ状態における内部摩擦角 $\phi_f^{\text{plane}}$ (平面ひずみ状態で測定したせん断強度を基にモールクーロンの破壊規準を適用して算定した内部摩擦角)を指定する。 $\phi_f^{\text{plane}} = \phi_f$ と置くと、FLIP3Dの破壊規準はMohr-Coulombの破壊規準にほぼ等しくなる。既往の砂の室内試験結果によれば、 $\phi_f^{\text{plane}} = 1.1\phi_f$ とされている<sup>8)</sup>。

過剰間隙水圧モデルは、上記のMohr-Coulombの破壊規準とそれから派生する破壊規準に対応している。但し、粘着力 $c$ は0の場合のみを取り扱う。

## (2) その他の破壊規準

FLIP3Dは、Mohr-Coulombの破壊規準の他に、以下の①～④に示す破壊規準などを表現することができる。

### ① Tresca 規準

$$\text{破壊規準} : \sqrt{J_2} \cos \theta = c$$

### ② Von Mises 規準

$$\text{破壊規準} : \sqrt{J_2} \cos \theta = c (\cos \theta / \cos(\pi/6))$$

### ③ 拡張 Tresca 規準

$$\text{破壊規準} : \sqrt{J_2} \cos \theta = c \cos \phi_f - \sigma_m' \sin \phi_f$$

### ④ Drucker-Prager 規準

$$\text{破壊規準} : \sqrt{J_2} \cos \theta = (c \cos \phi_f - \sigma_m' \sin \phi_f) \times (\cos \theta / \cos(\pi/6))$$

FLIP3Dで上記破壊規準を設定するには、三軸状態におけるせん断強度を指定し(①と②の場合は $c$ 、③と④の場合は $c$ と $\phi_f$ の指定)、さらに、三軸状態におけるせん断強度に対する $\theta=0$ 度におけるせん断強度の倍率(①と③の場合は1.0、②と④の場合は $1/\cos(\pi/6)$ )を指定する。倍率は任意でよいので、上記①～④の破壊規準から派生する種々の破壊規準を表現することが出来る。

## (3) サブプレーン

3次元に拡張された多重せん断ばねモデルは、原則として半球当たり25面のサブプレーン<sup>1)</sup>を使用するが、計算時間の短縮や必要なメモリサイズの低減を図るために、この他に

10面（正二十面体の半分）のサブプレーン（図 6-2-4参照）も選択可能である。

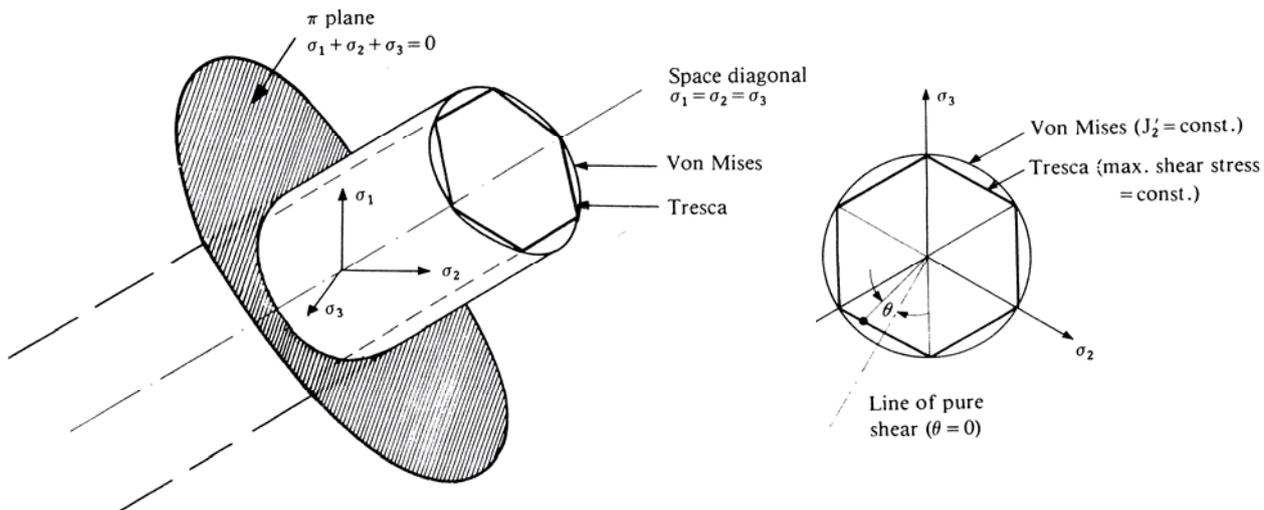


図 6-2-2 Tresca と Von Mises の破壊曲面 (Owen ら, 1980)<sup>9)</sup>

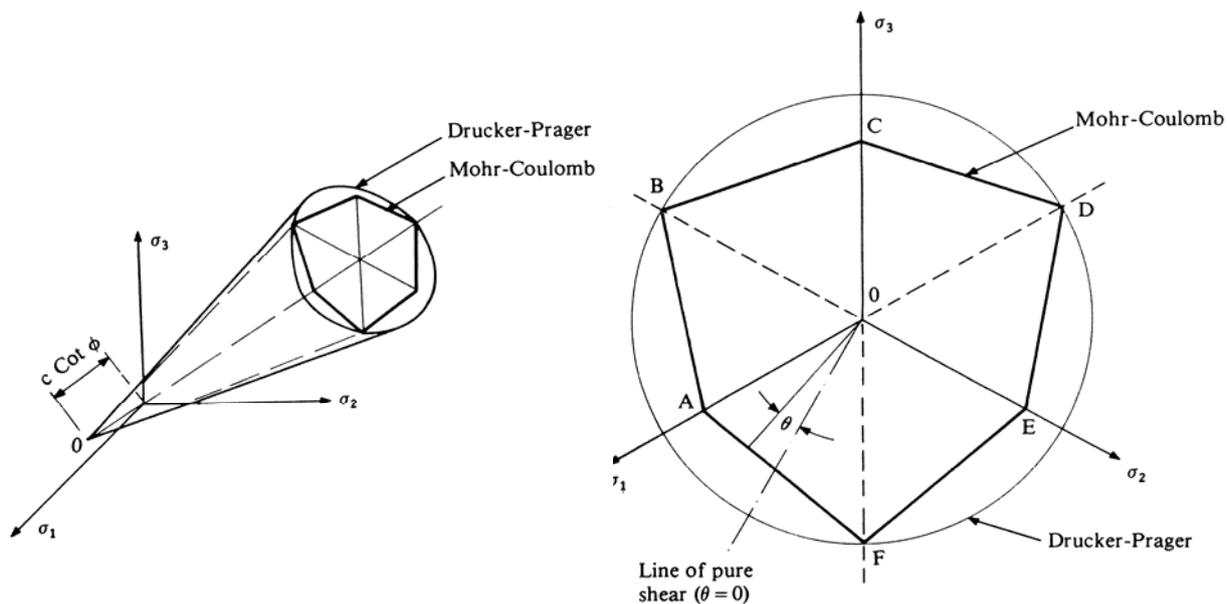


図 6-2-3 Mohr-Coulomb と Drucker-Prager の破壊曲面 (Owen ら, 1980)<sup>9)</sup>

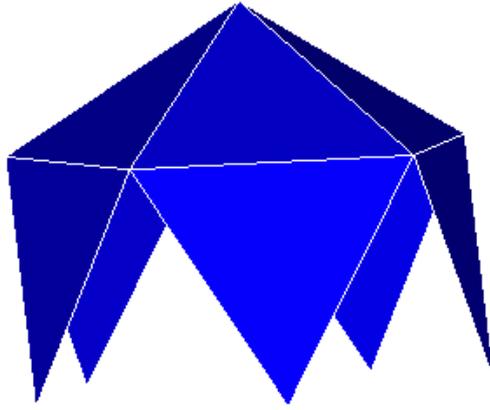


図 6-2-4 10面（正二十面体の半分）のサブプレーン

## 6-3 3次元モデルの作成について（杭基礎を対象として）

### 6-3-1 はじめに

杭基礎を3次元有限要素にモデル化する場合、杭体のモデル化の方法や、杭周辺地盤の分割の粗さなどを具体的に決める必要がある。一般的には、実物に忠実にモデル化し、要素の分割は十分に細かく行うことで適切なモデルを作成することができる。しかしながら、3次元動的有効応力解析ではモデル（節点数）が大きくなることにより計算機の能力の制限で計算不可能になることや、計算が実行できたとしても、膨大な計算の処理に実務的でない計算時間を要することがおこりうる。そこで、計算結果に影響しない範囲で、可能な限りモデルの節点数を少なくする工夫が必要となる。

本節では、杭基礎を対象とした実務的な3次元FLIP解析のモデル作成に参考となる知見を得ることを目的として、杭周辺における地盤の適切な分割程度や、杭の実務的なモデル化方法の検討について示す。また、杭基礎等、深度方向に一定の断面を有する構造物を対象として、FLIPの3次元有限要素メッシュを容易に作成するツール（ツール名：FLIP mesh）の使用方法について解説する。

### 6-3-2 水平断面におけるメッシュの粗さに関する検討

#### (1) 目的

杭間隔が比較的大きい杭基礎を対象として、適切と考えられる杭周辺の地盤のメッシュ分割について検討する。

#### (a) 検討方法

#### (b) 検討手順

直杭より構成される基礎は深度方向に同様の断面を有する。3次元メッシュを作成する場合、最初に水平断面のメッシュ分割を行い、これを深度方向に展開する方法がとられる。例えば、図 6-3-1に示す大型振動台実験モデル<sup>13)</sup>を対象に3次元メッシュを作成する場合は、最初に後述の図 6-3-3に示すような水平断面に対してメッシュ分割を行う。続いて深度方向の分割を図 6-3-4（地表面以深の部分）に示すように設定して、後述のメッシュ作成ツール（FLIP Mesh）を用いて深度方向に展開する。ここで、深度方向の分割（最大要素高さ）については、2次元モデルの作成と同様、せん断波速度と解析で考慮する最大の周波数から設定することができるが、図 6-3-3に示すような水平断面のメッシュを作成する際の杭周辺地盤の分割に関しては、定量的な根拠に基づいた設定方法が示されていない。そこで、メッシュ分割の妥当性を示す必要がある。

メッシュ分割の妥当性の検討は、図 6-3-2の手順で実施する。

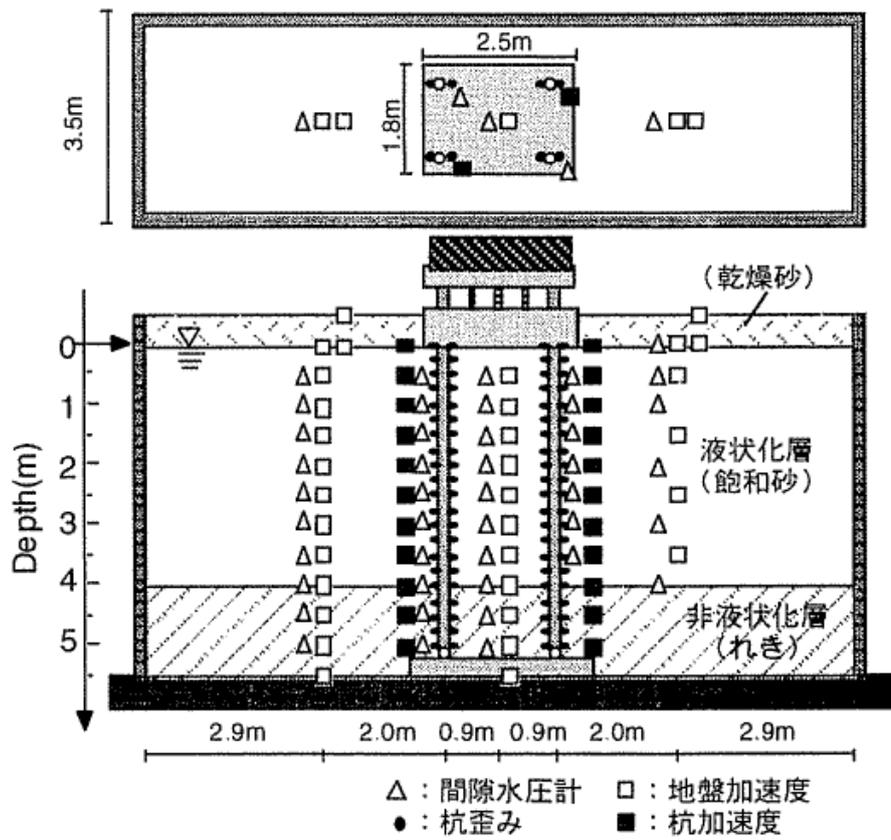


図 6-3-1 地盤－基礎－構造物模型（時松ら<sup>13)</sup>）

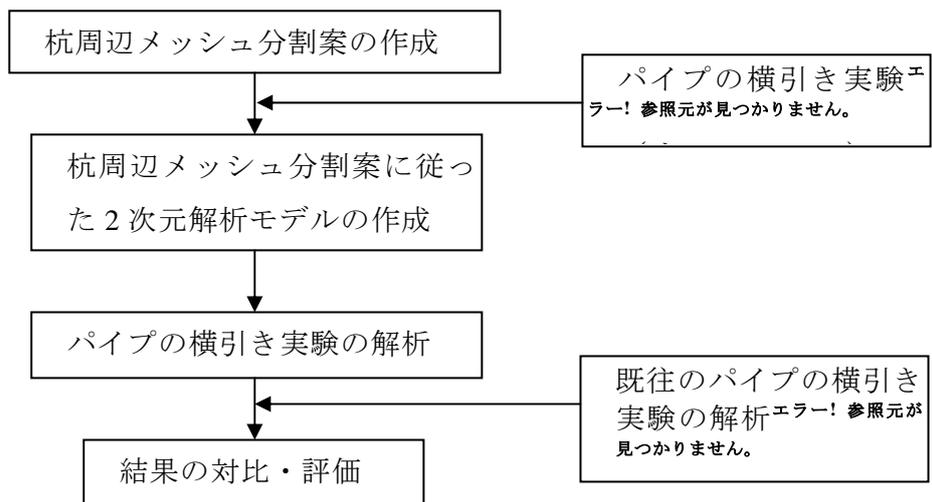


図 6-3-2 検討の流れ

Structure scale

5.00 m

節点数 : 1181

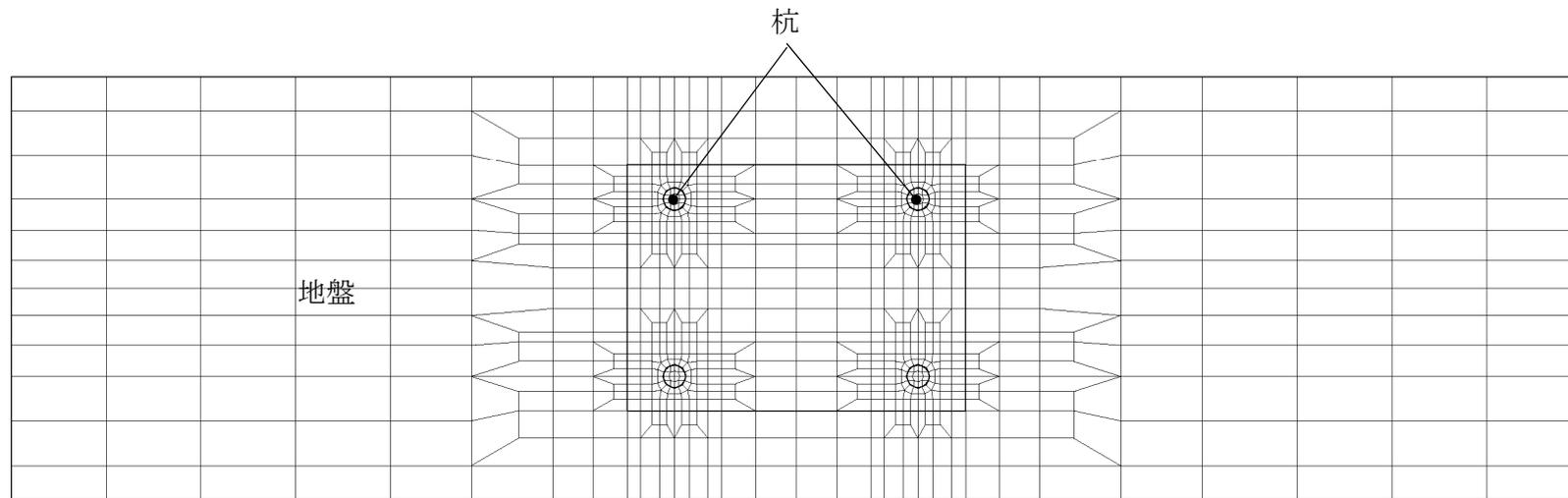


図 6-3-3 杭基礎の水平断面解析メッシュの一例（時松ら<sup>13)</sup>の実験モデル）

Structure scale

5.00 m

地表面以下の節点数  $1181 \times 27 \text{ 面} = 31887 \text{ 節点}$   
// 要素数  $1072 \times 26 \text{ 段} = 27872 \text{ 要素}$  (間隙水要素を除く)

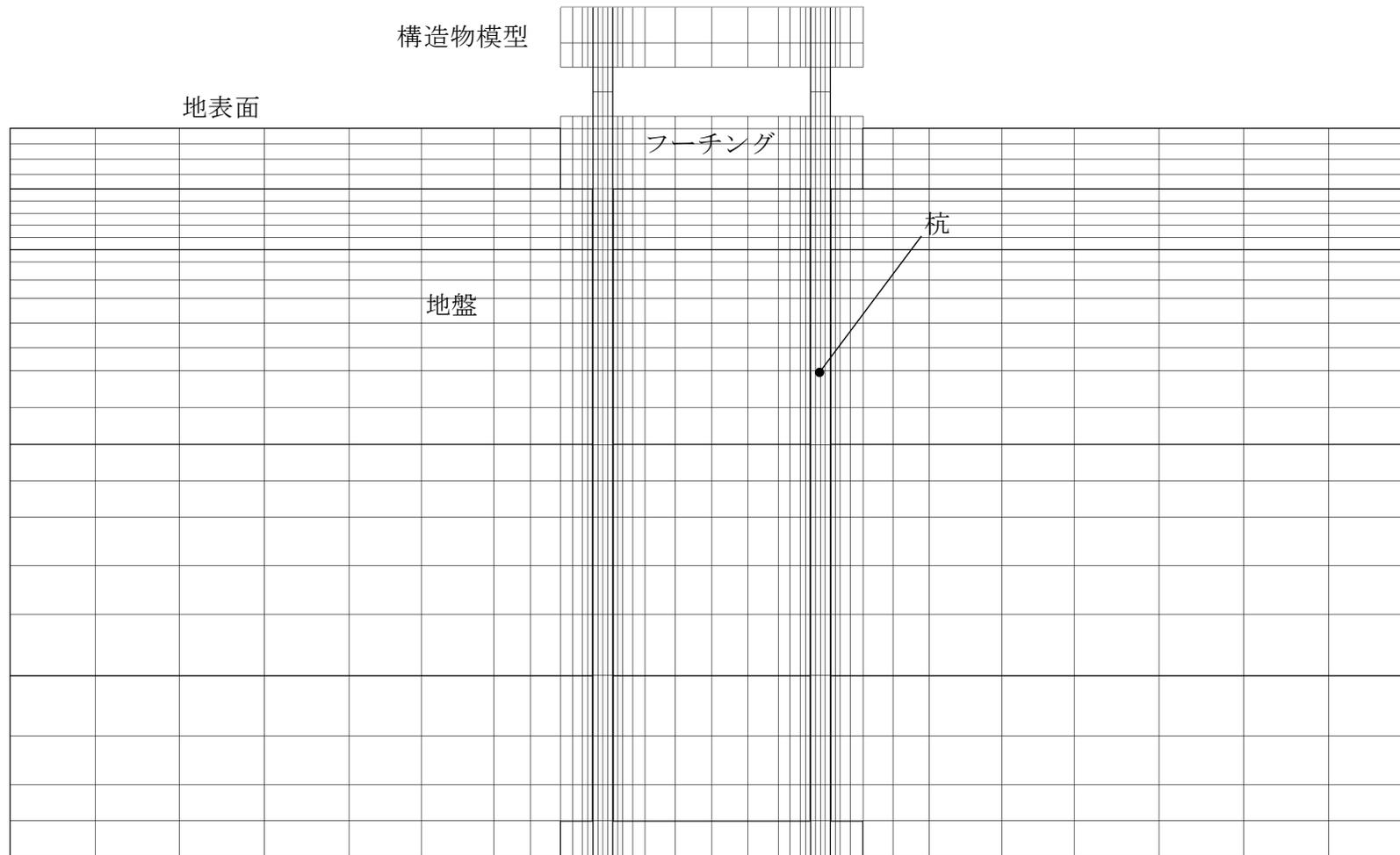


図 6-3-4 杭基礎の深度方向の分割の一例 (時松ら<sup>13)</sup>の実験モデル)

### (c) 杭周辺のメッシュ分割案の作成

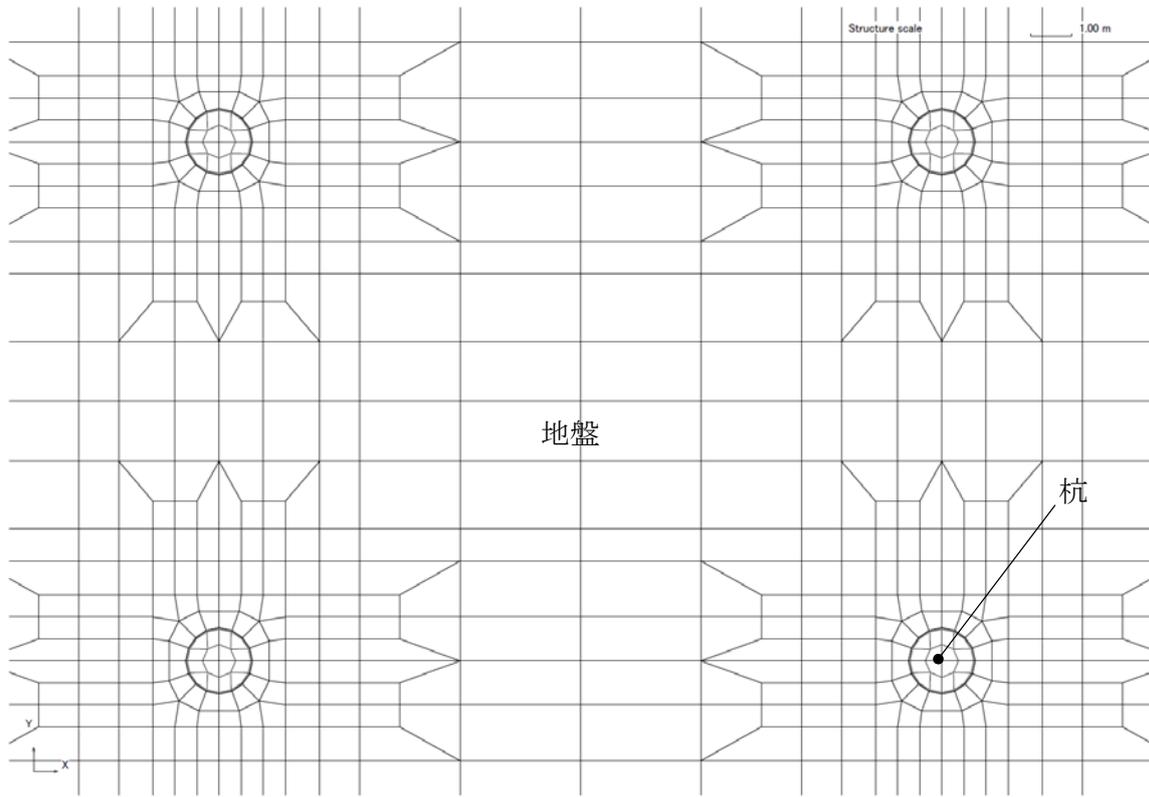
水平断面における杭周辺の地盤の分割案を図 6-3-5に示す。この分割案の概要は以下のとおりである。

- ① 杭を周方向に 16 分割。
- ② 杭の直径の 2 倍の長さを一辺とする正方形の領域を考慮。
- ③ 正方形の一辺を 6 分割。
- ④ 杭の表面の外側で正方形の内側の領域は、杭の半径方向に 2 分割にてメッシュを生成。
- ⑤ 正方形の外側の領域は、徐々にメッシュを粗くする。

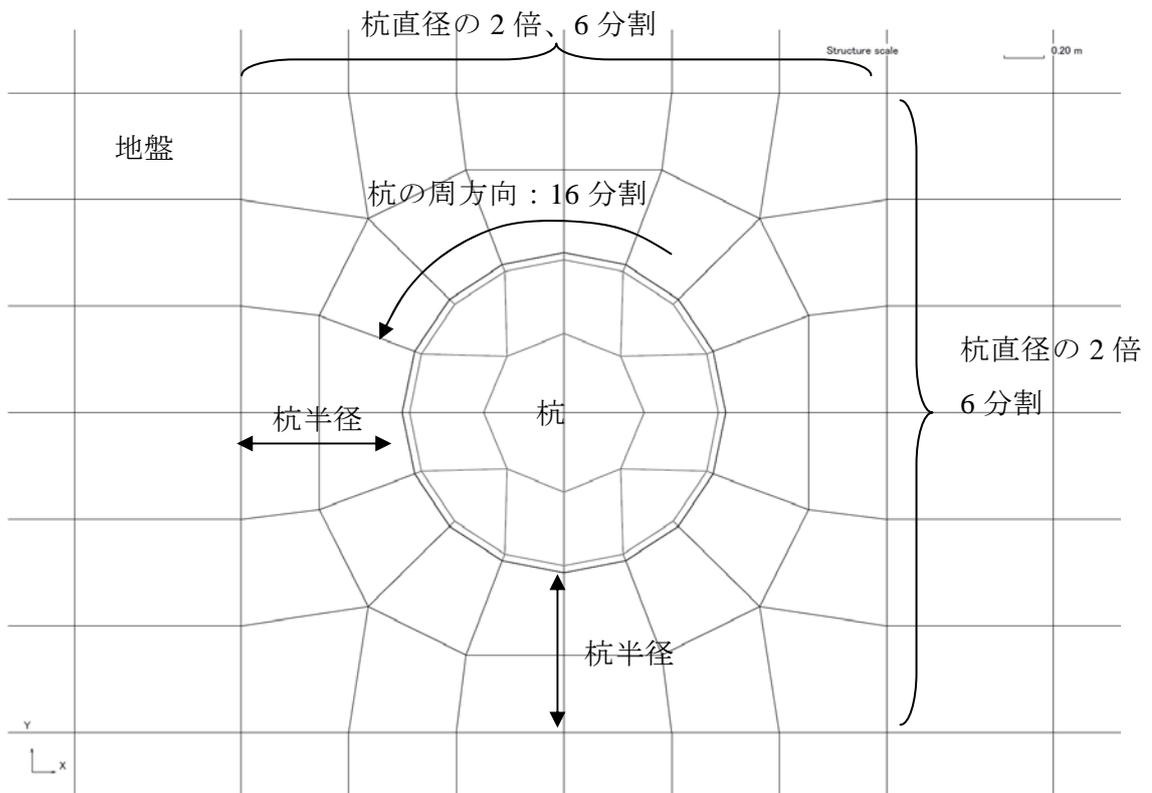
### (d) 既往のパイプの横引き実験<sup>14)</sup>および解析<sup>15)</sup>の概要

パイプの横引き実験の概要を以下に記す。

実験は、飽和土中の埋設管に強制変位が生じた場合の水平抵抗力を調べることを目的に実施された載荷実験<sup>14)</sup>である。実験モデルの概要を図 6-3-6に示す。幅 0.7m、奥行き 0.4m の剛土槽内部に作成された模型飽和地盤（豊浦砂、相対密度  $D_r=30\%$ ）の底面より 0.2m の位置に直径 0.03m、長さ 0.3m（見かけの比重：2.0）の鋼製の管が埋設されている。埋設管には直径 6mm の鋼製ガイドバーが取り付けられており、これを土槽の外部から押し引きすることにより埋設管に水平方向の強制変位を与えることが可能になっている。埋設管とガイドバーの間にロードセルが取り付けられており、埋設管全体の水平抵抗力が計測されている。土槽の内壁および埋設管の強制変位の方角に関して反対側において間隙水圧が計測されている。埋設管の土被り厚さ  $H$  と直径  $D$  の比( $H/D=4,6,8,10$ )と、強制変位速度を種々変化させて載荷実験が行われている。



(a) 平面図



(b) 杭部分の拡大

図 6-3-5 杭周辺地盤の水平断面のメッシュ分割案（杭周辺 16 分割）

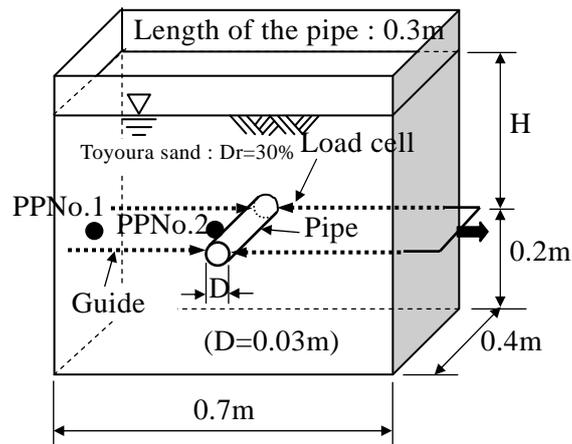


図 6-3-6 パイプの横引き実験（埋設管の強制変位実験）の概要図<sup>1)</sup>

一方、FLIP による解析も実施されている。その概略を以下に記す。

解析は、有限要素法に基づく有効応力解析法(FLIP<sup>3)</sup>)を用いた。解析モデルを図 6-3-7に示す。飽和土に多重せん断メカニズムに基づく有効応力モデル<sup>3)</sup>を考慮し、埋設管を線形弾性体でモデル化した。埋設管の長さにあわせて平面ひずみモデルの厚さを 0.3m とした。解析のパラメータは、相対密度  $Dr=35\%$  程度の豊浦砂を対象に拘束圧 3kPa 程度の条件で設定されたものを用いた。土に重力を作用させた静的解析により水平成層状態の初期応力を発現させた後、埋設管の中心に位置する節点に水平方向の強制変位を与えることにより実験における強制変位の入力を模擬した。強制変位を作用させる解析は、非排水条件で静的に行った。

節点数：2187

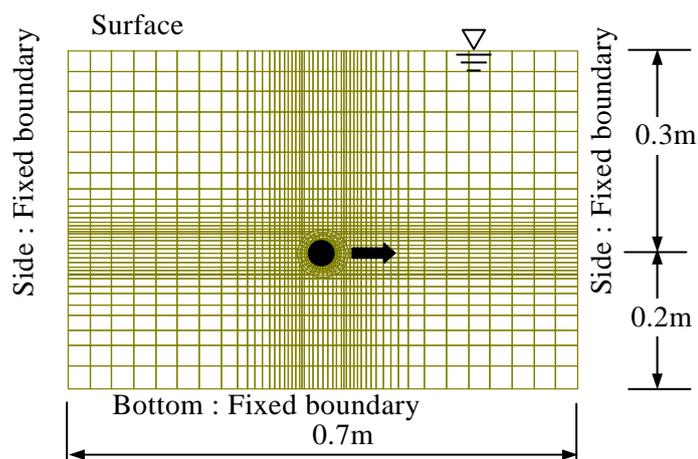


図 6-3-7 既往の解析モデル<sup>15)</sup>

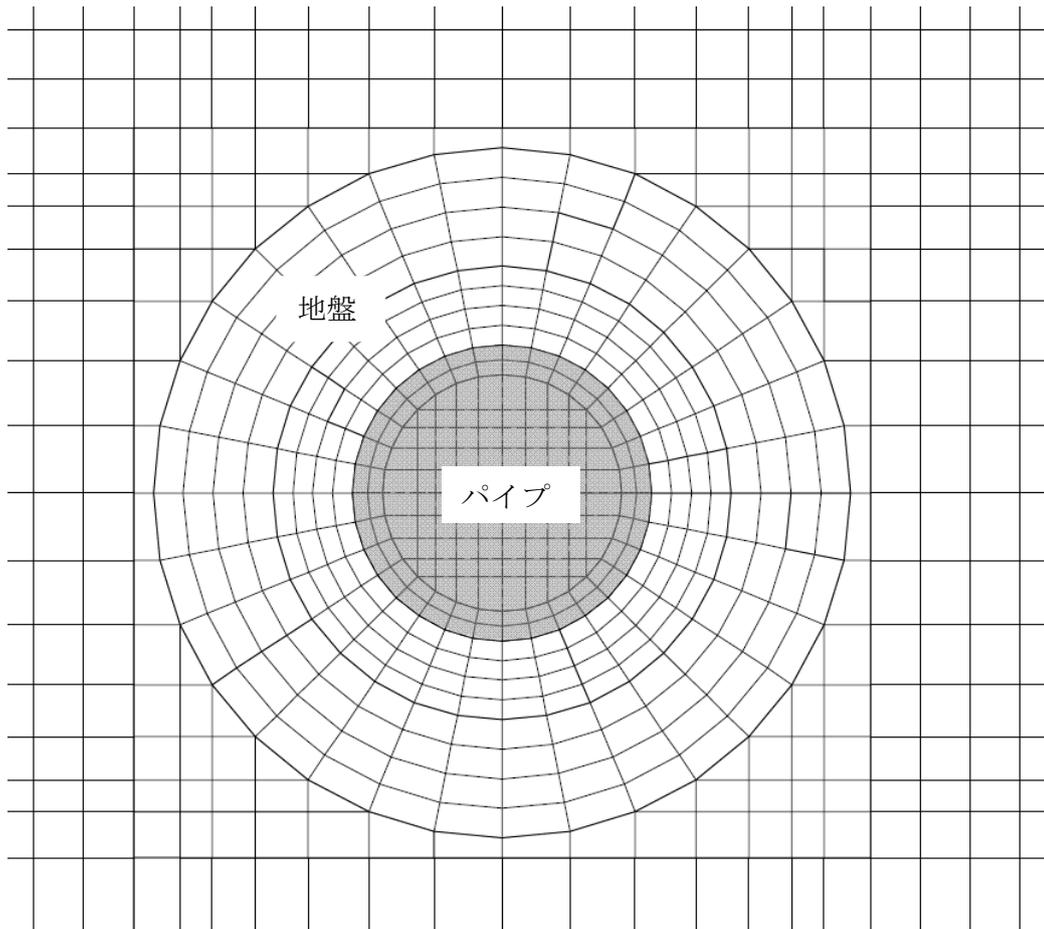


図 6-3-8 既往の解析モデルのパイプ周辺の地盤分割（杭周辺 32 分割）

尚、既往のモデルのパイプ周辺地盤のメッシュを図 6-3-8に示す。パイプ周辺は 32 分割されている。パイプの表面から、直径までの地盤範囲は、パイプ半径方向に 8 分割程度されている。

(e) メッシュ分割案に従ったパイプの横引き実験<sup>14)</sup>の 2 次元モデルの作成

上記の実験に対し、パイプおよびパイプ周辺地盤に対して図 6-3-5(b)の正方形の部分を適用し、モデルを作成した。全体のメッシュ図は、変位図とともに後述する。図 6-3-8に示す既往のメッシュに比べ、粗いものになっている。節点数を表 6-3-1に示す。

表 6-3-1モデルの節点数

	既往のモデル	今回のモデル	備考
節点数	2187	460	

## (2) 検討結果

検討結果として、パイプをその直径だけ変位させた場合の変位図を図 6-3-9、図 6-3-10 に示す。また、パイプの変位と荷重の関係を実験結果と併せて図 6-3-11に示す。

今回作成した比較的粗いメッシュ（節点数：460）を用いた場合は、従来の細かいメッシュ（節点数：2187）を用いた場合に比べ、水平方向の抵抗力は1割程度大きくなる傾向にある。しかしながら、杭径の1/3程度以内の変位は両者ほぼ一致すること、実験により得られる抵抗力と傾向は異なるものの、大きな差異を生じていないことがわかる。この結果から、単杭あるいは、それに近い状態の杭においては、図 6-3-5(b)の杭周辺水平断面のメッシュ分割は妥当であると考えられる。

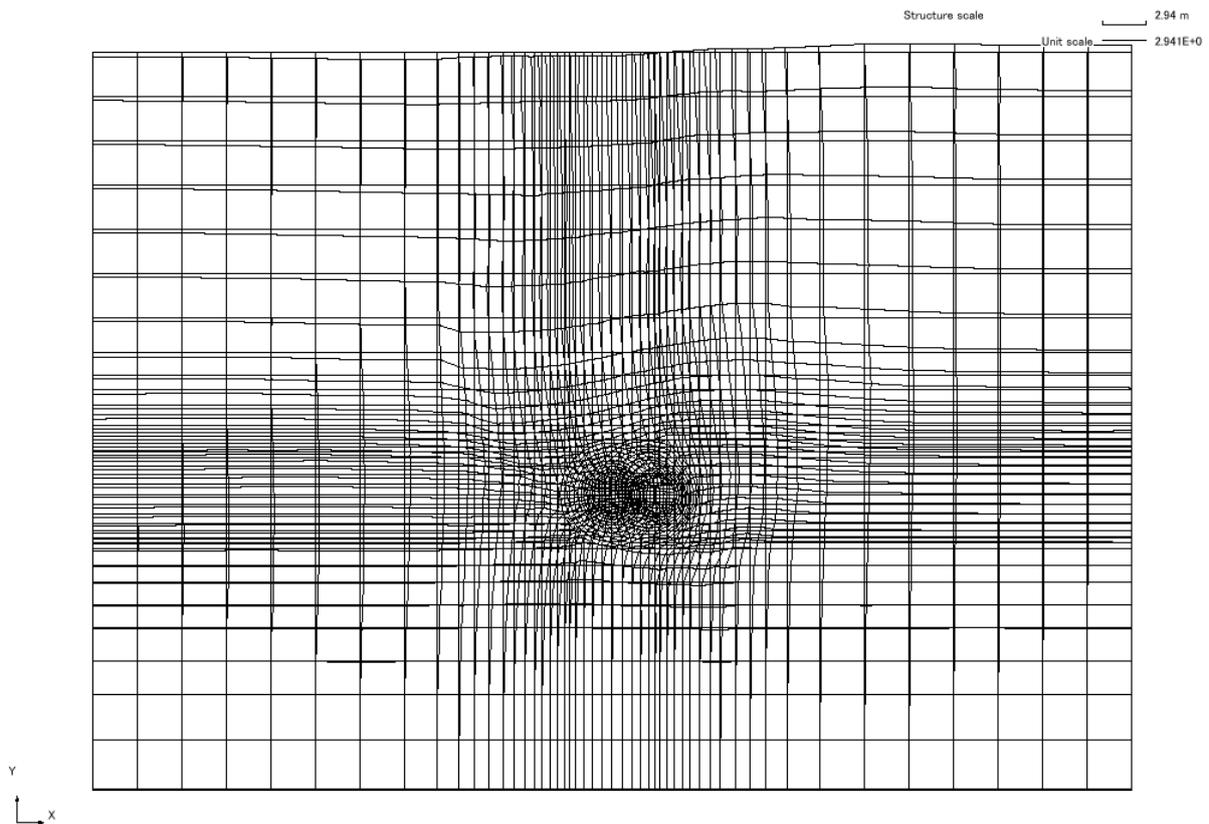


図 6-3-9 細かいメッシュによるパイプ横引き実験の解析（溜ら、2003）（1D 変位時）

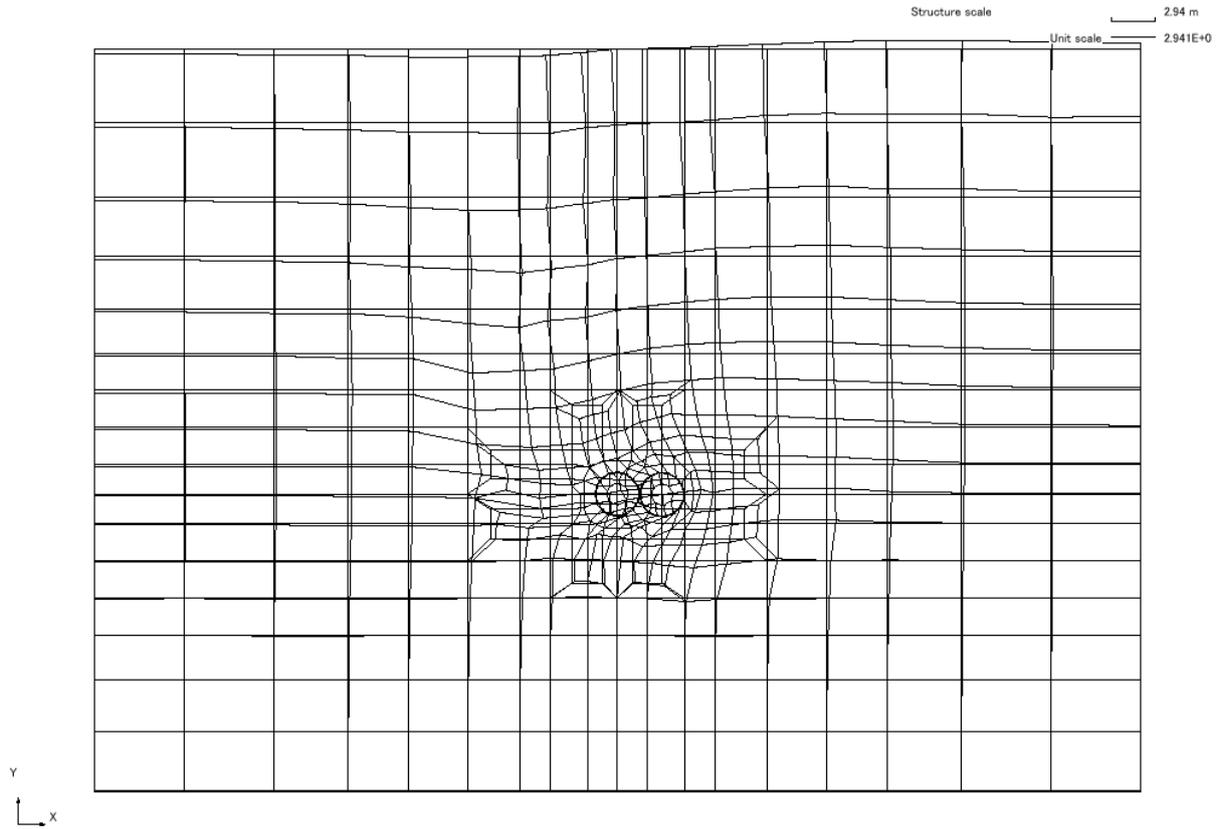


図 6-3-10 粗いメッシュによるパイプ横引き実験の解析 (1D 変位時)

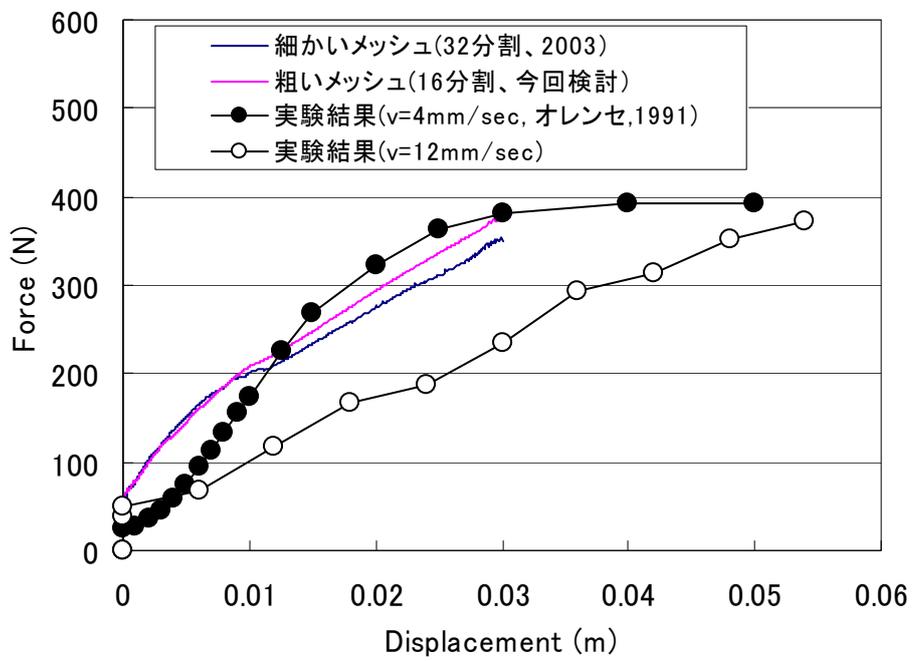


図 6-3-11 水平抵抗と変位の関係

### (3) まとめ

杭周辺の地盤のメッシュ分割について、パイプの横引き実験を対象とした解析で検討した。杭周辺を 16 分割した粗いメッシュによる解析結果は、32 分割した細かいメッシュを用いた場合に比べ、水平方向の抵抗力は 1 割程度大きくなる傾向にある。しかしながら、杭径の 1/3 程度以内の変位は両者ほぼ一致すること、実験により得られる抵抗力と傾向は異なるものの、大きな差異を生じていない結果を得た。このことから、水平断面における杭周辺の地盤は、16 分割を基本とする比較的粗いメッシュでモデル化することで、杭と地盤の相互作用を適切に表現できるものと考えられる。

ただし、群杭のように隣接する杭間隔が小さい場合は、16 分割を基本としたメッシュが適切でない可能性がある。その場合は、分割を細かくするなどの配慮が必要である。

### 6-3-3 杭の3次元モデル

地中部分の杭のモデル化について示す。

3次元解析における杭（直杭）のモデル化の方法については、様々な方法が考えられるが（例えば文献 16）参照）、第3期 FLIP 研究会の3次元解析 WG における検討では、図 6-3-12に示す方法によりモデル化した。

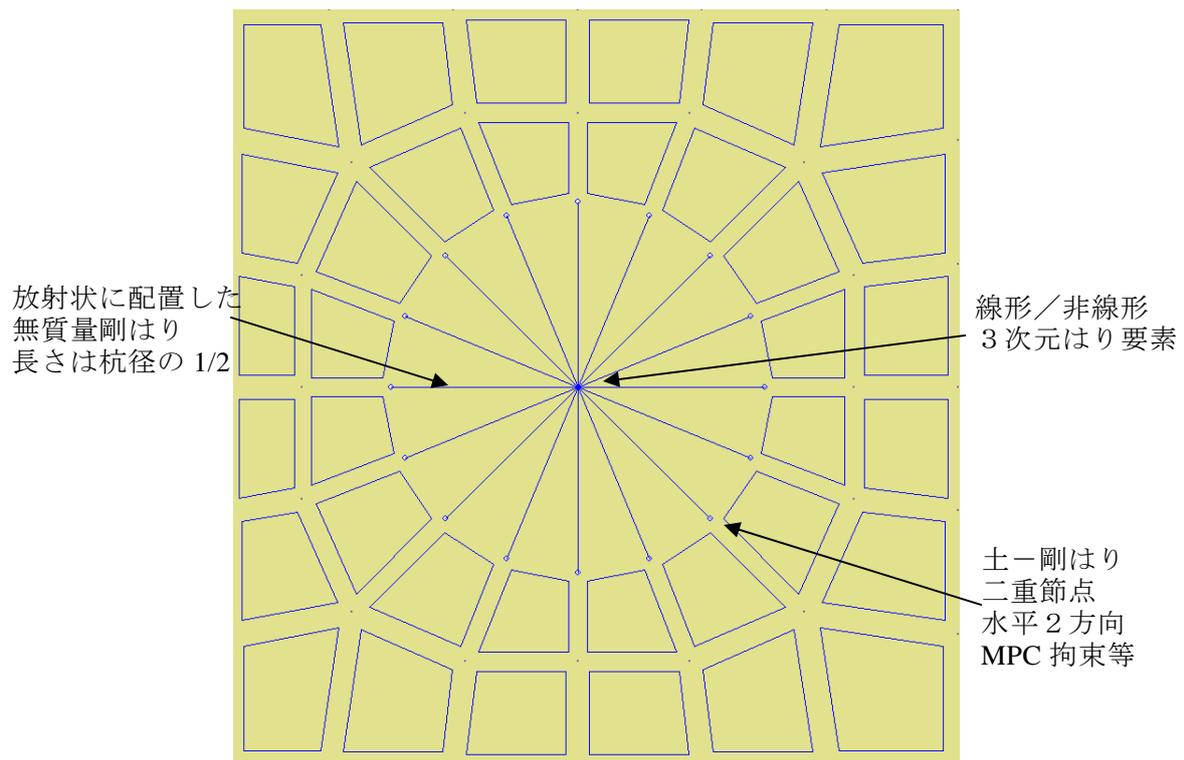
すなわち、土要素は、杭の部分は除いて、すなわち、空洞を残して配置する。杭の中心部には、杭の剛性と質量を有する3次元線形（または非線形はり）要素を配置する。杭の周囲に配置された土要素節点の位置に別節点を設けて（二重節点とする）、その節点と同レベルの杭節点の間を無質量剛はりで結ぶ。この二重節点では、例えば、水平2方向の自由度同士を MPC 指定するとか、あるいは、ジョイント要素相当の非線形ばね要素を配置することが考えられるが、本検討においては、前者（MPC 指定）を採用した。

このモデル化では、杭の断面力や曲率などは、中心部に配置されたはり要素のものを参照することが出来る。また、杭に作用する土圧は、杭の周囲に配置された剛はりの軸力とせん断力を、剛はりの方向を考慮して、足し合わせることで評価できる。但し、剛はりに作用する力は、土圧の動的な成分や水圧も含まれる。また、FLIP3D では、静水圧は取り扱わないので、カウントされない。

なお、同一レベルの剛はりで構成される円盤は、常に、中心部に配置された杭と直交する。このため、杭のせん断変形に追随する動きは、このままでは表現できないが、曲げ挙動のみであれば、表現可能である。

このモデル化の妥当性は、第3期 FLIP 研究会の3次元解析 WG の実験等を対象とした解析により検証されている。

a. 平面図



b. 3次元有限要素メッシュの様子

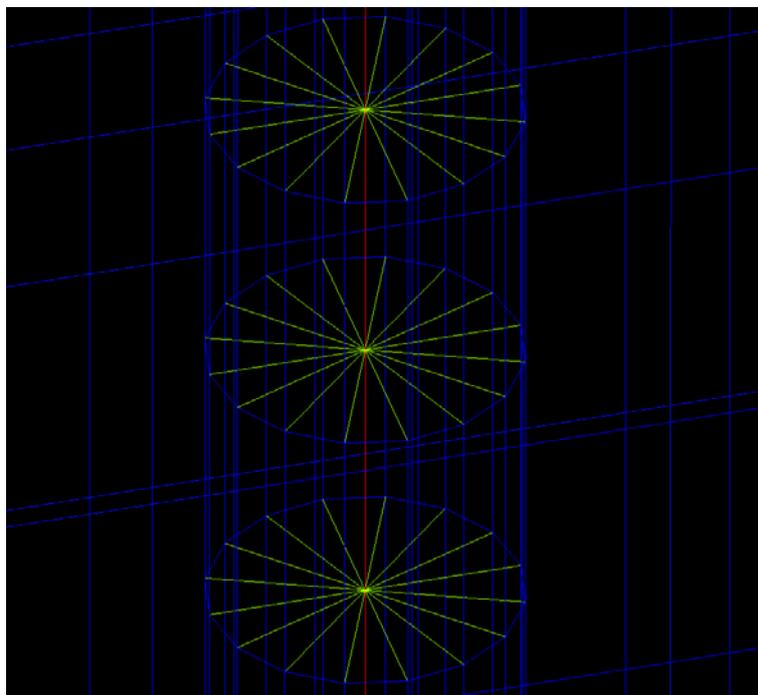


図 6-3-12 3次元解析における杭のモデル化方法

#### 6-3-4 水平断面の3次元化の実施例（プログラム：FLIPMESH）

水平断面において作成した解析メッシュを深度方向に展開し、3次元解析メッシュを作成する具体的方法について示す。

杭基礎構造物の振動台実験や水平成層地盤に打ち込まれた杭への載荷実験等の3次元解析モデルを作る場合、2次元の水平断面を対象にメッシュを作っておけば、それを深さ方向に厚みを与えることにより、3次元解析メッシュの主要な部分が出来てしまう場合がある。これを行うために、プログラム FLIPMESH 1.0 版を開発し、平成 16 年 6 月にリリースされた。その後、本作業部会の検討において、本格的な 3次元解析モデルを作成するために使われはじめた。使用に伴い、必要な機能が明らかになって来たので、それらを整備して、平成 18 年 2 月には、FLIPMESH 1.6 版がリリースされた。

ここでは、この FLIPMESH 1.6 版の概要、機能、入出力ファイル、メッシュ生成の手順および本プログラムの例題を示す。

##### (1) 概要

FLIPMESH は、利用者が別に作成した 2次元メッシュデータなどを元に、FLIP3D の 3次元メッシュデータ（COOR, ELEM データ）を生成する。生成された 3次元メッシュデータに対して、拘束条件（BOUN, MPC データ）や分布荷重（DIST）の指定をすることができる。さらに、節点の座標に応じて節点を並べ替えて、その順に節点番号を付け替えることができる。

FLIPMESH は、FORTRAN で記述され、その実行モジュールは、WindowsXP などの OS の基で、バッチ形式で動く。メッシュデータ生成を指示するためのデータは、あらかじめコマンド形式で記述しておいて、それを入力する。

FLIPMESH の出力は、FLIP3D 形式の COOR, ELEM, BOUN, MPC, DIST の各データであり、解析フェーズに応じて、これらデータを適当に組み合わせて用いる。同時に、メッシュデータ確認のために、MicroAVS (Ver.7.0 等) のデータ形式である非構造格子タイプ (INP) の構造データファイルを出力する。

##### (2) 機能

FLIPMESH は、以下に示す機能を有する。利用者は、これらの機能を用いて、3次元メッシュデータを作成することになる。

FLIPMESH では、要素と要素を構成する節点からなるまとまりを**領域**と呼ぶ。領域は、2次元的であっても、3次元的な広がりを持っていても構わない。

領域は、ユーザーが要素・節点データとして直接定義したり（USER コマンド）、本プログラムのコマンド（RECT, TRPZ, DISC, DNUT, 3DPL の各コマンド）を用いて所定の範囲を所定の方法でメッシュ分割して作成したりすることができる。

さらに、ある領域に基づいて別の領域を定義することも可能である。すなわち、2次元的な領域に厚みを与えて3次元的な領域を作成したり (LAYR コマンド)、またある領域をコピーして別の領域を作成したり (COPY コマンド)、複数の領域を統合して一つの領域にしたり (INTG コマンド) して、新たに領域を定義することができる。また、必要に応じて領域を削除することも出来る (DELT コマンド)。

このような操作により目的の領域 (群) が定義されたならば、それに対して、拘束条件・荷重条件を与え (BOUN,MPC1,MPC2,MPC3,DIST の各コマンド)、さらに、節点をその座標値に応じて並べ替えて、その順に節点番号を振り直すことができる (SORT コマンド)。最後に、これらの要素・節点・拘束条件・荷重条件に応じて、メッシュデータ (#01) を出力する (END コマンド)。

なお、図 6-3-13には、2次元的な領域に厚みを与えて3次元的な領域を作成する機能を有する LAYR コマンドの動作の概念図を示す。

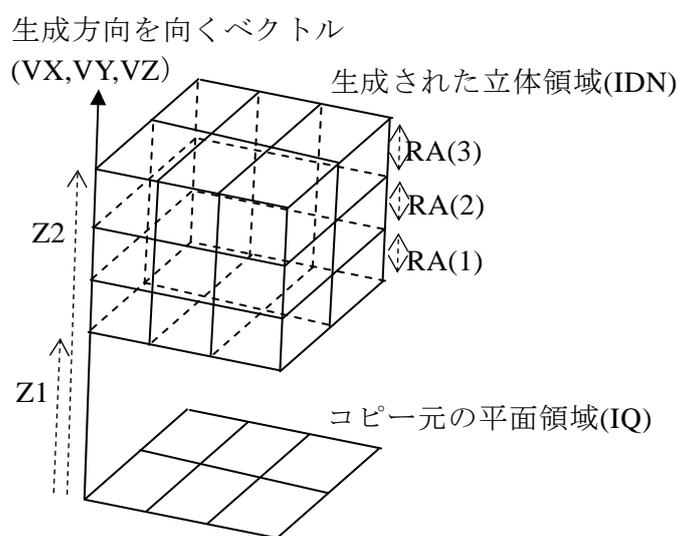


図 6-3-13 2次元的な領域に厚みを与えて3次元的な領域を作成する LAYR コマンドの動作の概念図 利用者は、コピー元の平面領域 (IQ)、3次元領域を生成する方向 (VX, VY, VZ)、生成する範囲 (Z1, Z2)、生成する層の数、各層の厚さの比 (RA) を指定する。

### (3) 入出力ファイル

FLIPMESH の入出力ファイルを図 6-3-14および表 6-3-2に示す。

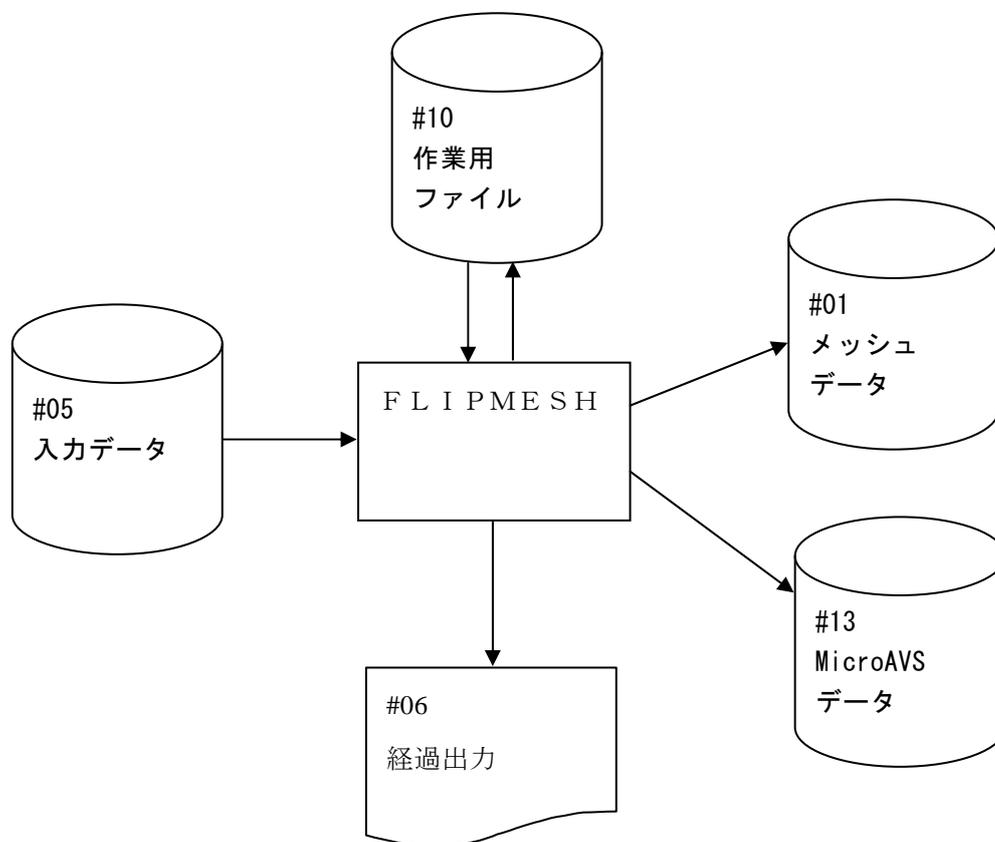


図 6-3-14 入出力ファイル関連図（図中の#xx はファイル機番）

表 6-3-2 ファイル一覧

機番	ファイル名	I/O	形式	内容
1	メッシュデータ	O	TXT	FLIP3D の節点データ、要素データ、拘束条件データ
5	入力データ	I	TXT	メッシュデータ作成制御データ
6	経過出力	O	TXT	入力データのエコプリントなど
10	作業用ファイル	W	TXT	
13	MicroAVS データ	O	TXT	生成した節点と要素を MicroAVS で表示するための MicroAVS 非構造形式データ

注 1) ファイルはすべて順編成ファイル。

注 2) 表中の記号の意味は次の通り。I=入力ファイル、O=出力ファイル、W=ワークファイル、TXT=テキスト型式、BIN=バイナリ形式

注 3) FLIPMESH プログラムは、内部に OPEN 文や CLOSE 文が無いので、使用するファイルについては、FLIPMESH 実行用バッチファイルを作成して、そこでファイル機番とファイル名の対応関係を指定する必要がある。

#### (4) メッシュ生成の手順

FLIPMESH を用いて、3次元解析用メッシュデータを作るためには、まず、基になる水平断面を、四辺形要素を用いて2次的にメッシュ分割したデータや、場合によっては、3次元メッシュの特定の部分を表す3次元メッシュデータ（例えば、直杭を表す3次元はり要素）を用意する必要がある。

次に、これらのデータに基づいて、FLIPMESH に3次元解析用メッシュデータを作成させるための手順を記した FLIPMESH の入力データ（1行 80文字（半角）のカード形式のテキストファイル）を用意する。FLIPMESH プログラムはこれを標準入力（#05）として読み込む。

FLIPMESH の入力データは、前述の通りコマンド形式で記述する。すなわち、ある種類のデータを記述したい場合やプログラムにある動作を指示する場合には、所定の英大文字4文字（半角）からなる命令語をカードの第1～4カラムに記述した命令カード（あるいは単に命令またはコマンド）を作り、その後ろに必要なら所定のデータを記述したカードを並べる。各コマンドの機能と実行すべき順序を図 6-3-15に記す。

最後に、FLIPMESH を、バッチファイルから起動して、上記入力データを読み込ませ、3次元解析用メッシュデータを作成する。なお、初期自重解析と地震応答解析用の両方のメッシュデータが必要である場合には、後で示す例題にもあるように、FLIPMESH の1回の処理で、両方のメッシュデータを作成しなければならない。別々に作成すると、例えば、節点の並べ替えで、同一座標を持つ複数の節点のどれが先になるか等、必ずしも、両者全く同じメッシュになるとは限らないからである。

## 開始

- ・ **FEAP** : 1 節点当たりの自由度数や 1 要素当たりの最大節点数を指定する。

## 領域定義

### 利用者定義

- ・ **USER** : 利用者が別に作成した節点と要素データを読み込む。

### 2 次元的領域定義 (全ての生成される節点は指定した Z 座標値を持つ)

- ・ **RECT** : 指定の長方形領域をメッシュ分割する。
- ・ **TRPZ** : 指定の台形領域をメッシュ分割する。
- ・ **DISC** : 指定の円盤内をメッシュ分割する。あるいは、指定の円盤を囲む正方形の円盤部分を除く領域をメッシュ分割する。
- ・ **DNUT** : 指定の穴あきドーナツ状の円盤部分をメッシュ分割する。

### 3 次元的領域定義

- ・ **3DPL** : 3 次元空間内の指定の長方形領域をメッシュ分割する。

## 領域制御

- ・ **LAYR** : 平面状の 4 節点要素に分割された領域に厚みを持たせて 8 節点要素から成る立体領域を作成する。
- ・ **COPY** : 指定の領域をコピーして新しい領域を作成する。新しい領域は、元の領域を平行移動させた位置に作成される。
- ・ **DELT** : 指定の領域を削除する。
- ・ **INTG** : 指定の複数の領域を統合して一つの領域とする。その際、同一座標の節点も統合される。

## 拘束条件・荷重条件

- ・ **BOUN** : 3 次元空間内の指定の四角形面内にある節点自由度を拘束する。
- ・ **MPC1** : 領域と領域の接触面上にある同一座標節点の自由度同士を多点拘束する。
- ・ **MPC2** : 指定の領域内にある所定の条件を満たす節点の自由度同士を多点拘束する。
- ・ **MPC3** : 3 次元空間内の指定の四角形面内にある所定の条件を満たす節点の自由度同士を多点拘束する。
- ・ **DIST** : 3 次元空間内の指定の長方形領域内にある所定の条件を満たす要素の面に対して、分布荷重を与える。

## ソート

- ・ **SORT** : 節点の座標に応じて節点を並べ替えて、その順に節点番号を付け替える。

## 終了・出力

- ・ **END** : メッシュデータ (#01) などを出力し、処理を終了する。

図 6-3-15 FLIPMESH によるメッシュ生成の手順 (コマンドの実行順)

※ 各枠内のコマンドの実行順序は任意。

※ 先頭に FEAP 命令、終端に END 命令が必須だが、それ以外は必要なもののみを置く。

## (5) 例題（杭基礎の大型モデルのモデル）

### (a) 解析対象

FLIPMESH 1.6 版の例題として、杭基礎の大型土層実験のモデル<sup>17)</sup>を取り上げる。実験では、図 6-3-16に示すように、せん断土槽内に作られた砂地盤に、3基のフーチング（鋼管杭1基、PHC杭2基）と直接基礎を所定の間隔で設置されている。例題では、杭基礎C（鋼管杭）のみを取り上げ、その他の基礎は無視する。鋼管杭は、長さは5m、杭頭の拘束条件は剛結で、杭下端部はボルトで固定している。フーチングと上載荷重は一体とし、鋼板を重ねて作成している。

### (b) 座標系と解析モデルの範囲

解析モデルを作成するに当たっては、図 6-3-16に示す座標系を採用し、また、座標原点の位置は、同図に示した通りである。

解析モデルは1/2対称モデルとした。すなわち、 $Y \geq 0\text{m}$ の範囲の構造のみをモデル化の対象とし、 $Y = 0\text{m}$ には、対称境界条件を設定した。

### (c) モデル化の対象と境界条件

モデル化の対象は、土、杭、フーチングおよびせん断土槽のフレームである。せん断土槽のフレームは、例題では、境界条件として表現する。土は、FLIP3Dのマルチスプリング要素で、杭は、杭中心から放射状に伸ばした剛はりも含めて、FLIP3Dの線形はり要素で、フーチングはBRICK要素（線形要素）でモデル化する。フーチングと土は、直接には接触しないようにモデル化する。杭の下端は、6自由度（ $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$ ）を単点拘束（SPC）する。杭の上端1要素分は、フーチングに埋め込んで、そこで節点共有とする。

両側面（ $X = \text{一定}$ ）上の土要素の節点は、せん断土槽のフレームを考慮して、同一レベル節点の $X$ 方向自由度は同じ動きをするようMPC指定する。なお、後述するように、このMPC指定は、全体行列のバンド幅を増大させて、解析を行う際には非常に大きなメモリが必要になり、計算時間もかなりかかるようになる。せん断土槽のフレームをそのままはり要素等でモデル化の方が効率的である。解析モデル底面では、土要素節点に関しては、3自由度（ $U_x, U_y, U_z$ ）を単点拘束（SPC）する。解析モデル奥の土がせん断土槽と接触する面（ $Y = \text{一定}$ ）上の土要素節点に対しては、土槽枠を表現するために、 $U_y$ 自由度を単点拘束（SPC）する。1/2対称面（ $Y = 0\text{m}$ ）上の土要素節点に対しても、同様に、 $U_y$ 自由度を単点拘束（SPC）する。

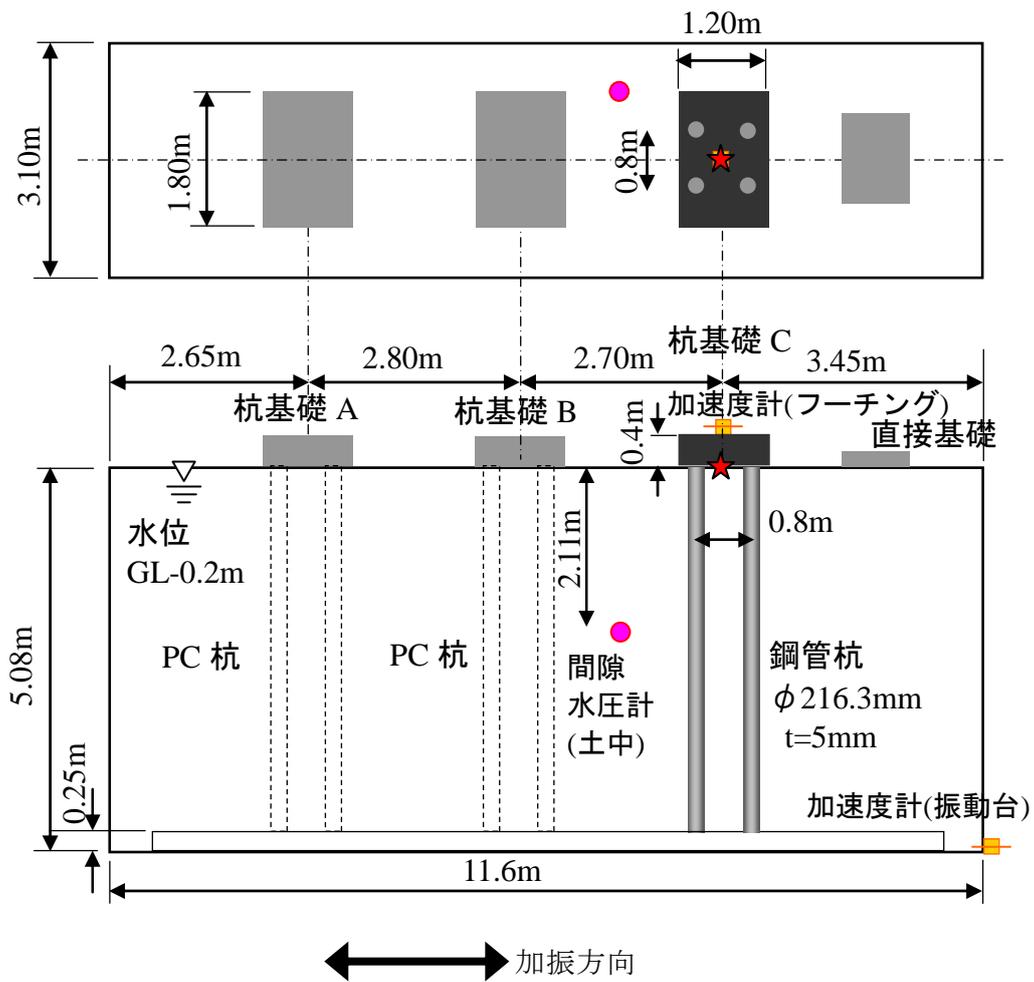


図 6-3-16 杭基礎の実験モデル (17) より引用)

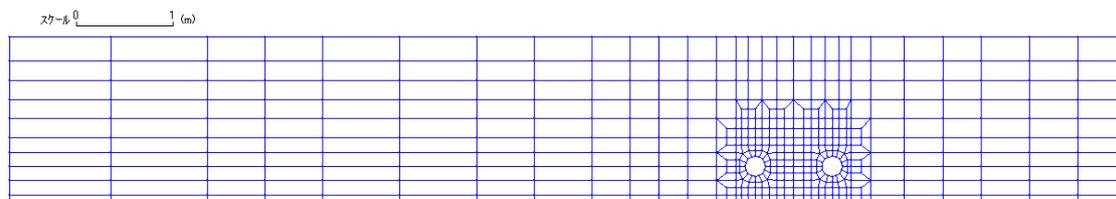
例題では、基礎としては杭基礎 C (鋼管杭) のみモデル化した。また、★は座標原点、モデルは 1/2 対称モデルとして、 $Y \geq 0m$  の部分 (図中の破線より奥側) のみモデル化。

(d) FLIPMESH により 3 次元解析モデルを構築するために用意した部品

FLIPMESH により 3 次元解析モデルを構築するためには、土部分の水平断面をメッシュ分割した 2 次元メッシュデータや、その他必要なメッシュデータをあらかじめ準備しておく。これらのメッシュデータは、FLIPMESH の USER コマンドで指定する。

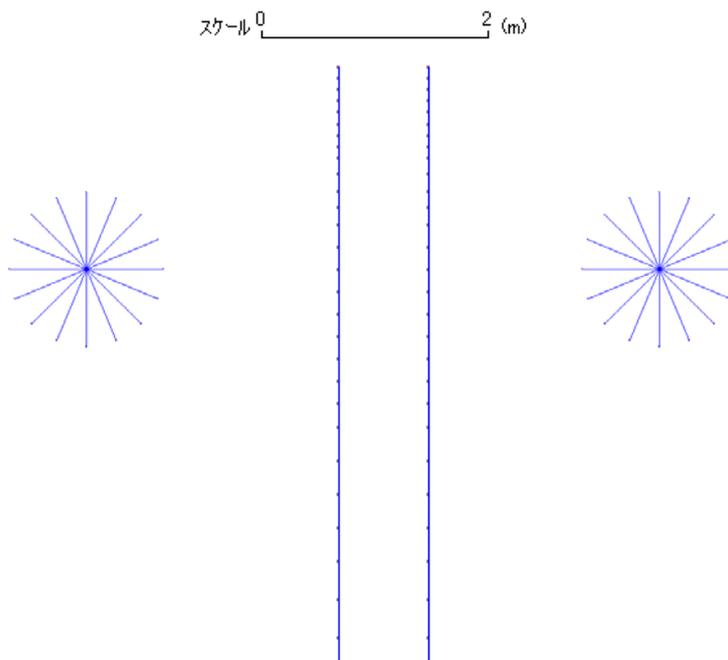
ここでは、あらかじめ用意したメッシュデータを図示する。

1) 土部分の水平断面モデル (領域 1) : 四辺形平面要素



2) 無質量剛はりの水平断面モデル (領域 2) : 2 次元はり要素

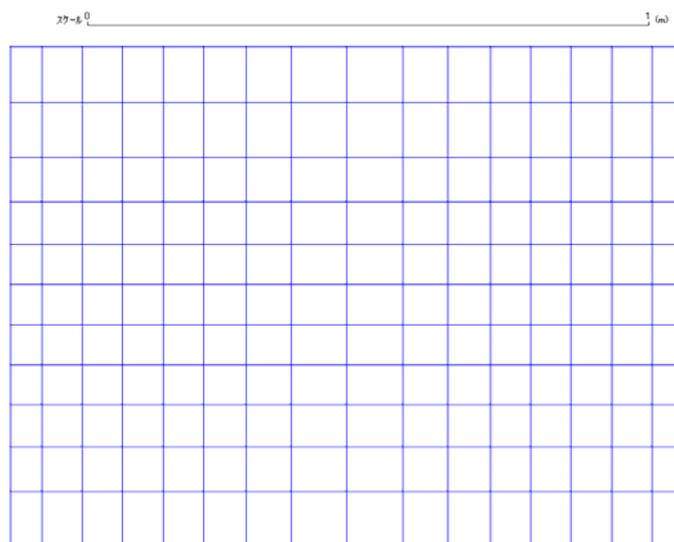
3) 杭 2 本分 (地中部) の 3 次元モデル (領域 3) : 3 次元はり要素



4) フーチング内に埋め込まれた杭 2 本分の 3 次元モデル (領域 4) : 3 次元はり要素

※特に図示しない。

5) フーチングの水平断面モデル (領域 5) : 四辺形平面要素



(e) 各コマンドの処理内容

3次元解析用メッシュデータを作成するためのコマンドと各コマンドでの処理内容を図 6-3-17と図 6-3-18に示す。対応する FLIPMESH 1.6 版用の入力データは、(g) に示す。

(f) 作成された 3次元解析用メッシュデータ

これらのコマンドにより FLIPMESH 1.6 版が生成した 3次元解析用メッシュデータに基づいて、3次元メッシュ分割図を描いた。これを図 6-3-19に示す。なお、この図は、間隙水要素の生成を抑制して得た 3次元解析用メッシュデータに基づいて描いたものである。これは、土要素と間隙水要素は同一空間に二重に定義されるので、そのままだと、図化に使用したプログラムでは描画が出来ないためである。

**FEAP :**

**USER :**

- ①土部分の水平断面モデルを読み込み、<領域 1>とする。
- ②無質量剛はりの水平断面モデルを読み込み、<領域 2>とする。
- ③杭 2 本分の 3 次元モデルを読み込み、<領域 3>とする。
- ④フーチング内に埋め込まれた杭 2 本分の 3 次元モデルを読み込み、<領域 4>とする。
- ⑤フーチングの水平断面モデルを読み込み、<領域 5>とする。

**LAYR :**

- ①地盤の 3 次元モデル<領域 6>を、土部分の水平断面モデル<領域 1>から生成する。
- ②フーチングの 3 次元モデル<領域 7>を、フーチングの水平断面モデル<領域 5>から生成する。

**DELT :**

- ①土部分の水平断面モデル<領域 1>を削除
- ②フーチングの水平断面モデル<領域 5>を削除

**COPY :**

- ①無質量剛はりの水平断面モデル<領域 2>を、各々所定の Z 座標にコピーして、<領域 101 ~128>を生成する。

**DELT :**

- ①無質量剛はりの水平断面モデル<領域 2>を削除

**INTG :**

- ①コピーして作成した無質量剛はりの<領域 101~128>を一つの領域<領域 10>に統合する。
- ②杭 2 本分の 3 次元モデル<領域 3>と無質量剛はり<領域 10>を統合して、3 次元杭モデル<領域 11>とする。節点も統合する。
- ③フーチング内に埋め込まれた杭 2 本分の 3 次元モデル<領域 4>を、フーチングの 3 次元モデル<領域 7>に統合する。節点も統合する。

**COPY :**

- ①間隙水要素<領域 100>を地盤の 3 次元モデル<領域 6>からコピーして生成する。

**INTG :**

- ①間隙水要素<領域 100>を地盤の 3 次元モデル<領域 6>に統合する。

**MPC1 :**

- ① 3 次元杭モデル<領域 11>と地盤の 3 次元モデル<領域 6>の間の接触点に対して、XY 方向自由度 (Ux,Uy) を MPC 指定する。
- ② 3 次元杭モデル<領域 11>とフーチングの 3 次元モデル<領域 7>の間の接触点 (地表面) に対して、6 自由度 (Ux, Uy, Uz, Rx, Ry, Rz) を MPC 指定する。

図 6-3-17 例題 : コマンドの処理内容 ( 1 / 2 )

**MPC3 :**

- ①循環境界条件：両側面 ( $X=一定$ ) 上の土要素の節点 (地盤の3次元モデル<領域6>の節点) を対象に、せん断土槽のフレームを考慮して、同一レベル節点の  $X$  方向自由度は同じ動きをするよう MPC 指定する (底面節点を除く)。  
※動的解析のみ必要。

**BOUN :**

- ①底面境界条件：底面上の土要素節点 (地盤の3次元モデル<領域6>の節点) に対して、3自由度 ( $U_x, U_y, U_z$ ) を単点拘束 (SPC) する。  
②側方境界条件：解析モデル奥の土がせん断土槽と接触する面 ( $Y=一定$ ) 上の土要素節点および  $1/2$  対称面 ( $Y=0m$ ) 上の土要素節点に対して、 $U_y$  自由度を単点拘束 (SPC) する。  
③杭下端埋込条件：3次元杭モデル<領域11>の下端節点に対して、6自由度 ( $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$ ) を単点拘束する。  
④側方境界条件：両側面 ( $X=一定$ ) 上の土要素の節点 (地盤の3次元モデル<領域6>の節点) を対象に、 $U_x$  自由度を単点拘束 (SPC) する。  
※初期自重解析のみ必要。

**SORT :**

- ① $X$  座標昇順> $Z$  座標昇順> $Y$  座標昇順に節点を並べ変えた後、節点番号を振り直す。

**END :**

図 6-3-18 例題：コマンドの処理内容 (1 / 2)

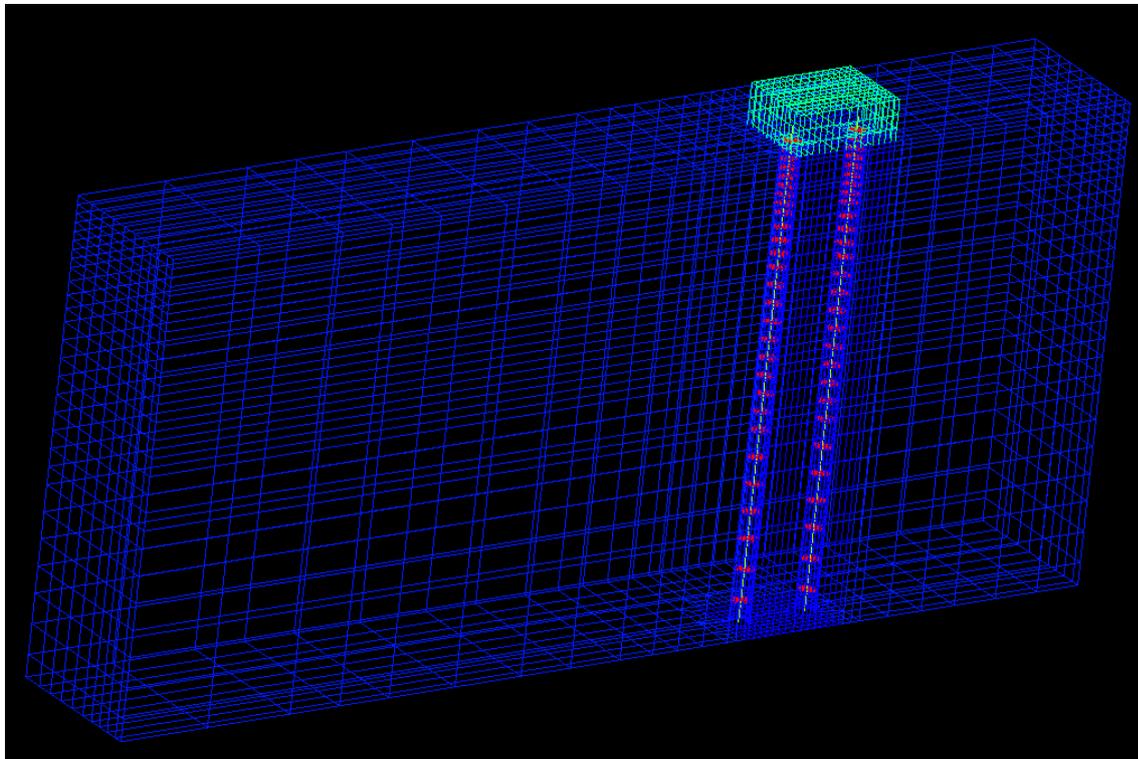


図 6-3-19 生成された3次元解析用メッシュデータに基づくメッシュ分割図

(g) 例題の入力データ

ここで取り上げた例題の FLIPMESH 1.6 版用の入力データを以下に示す。

```
FEAP TEST
#NMAT, NDM, NDF, NENG, MID
0 3 6 8 0

USER
※USER 命令の記述は省略

LAYR
#地盤の3次元モデル<領域6>を土部分の水平断面モデル<領域1>から生成する。
# IDN IQ, NEPNT, IRHSC, VX, VY, VZ
6 1 4 -1 0.0 0.0 -1.0
# Z1 Z2 IA1
0.0 5.33 28
#RA(I)
0.100 0.100 0.100 0.100 0.100 0.100 0.100 0.100
0.150 0.150 0.150 0.150 0.200 0.200 0.200 0.200
0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.300 0.300 0.300
0.300 0.340 0.340 0.250
#M(I)
0 RPT 28
#フーチングの3次元モデル<領域7>をフーチングの水平断面モデル<領域5>から生成する。
# IDN IQ, NEPNT, IRHSC, VX, VY, VZ
7 5 4 1 0.0 0.0 1.0
# Z1 Z2 IA1
0.0 0.47 3
#RA(I)
0.150 0.150 0.170
#M(I)
0 RPT 3

#土部分の水平断面モデル<領域1>を削除
DELT
1

#フーチングの水平断面モデル<領域5>を削除
DELT
5

COPY
#無質量剛はりの水平断面モデル<領域2>をコピー
# IDN IQ DX DY DZ MAT
101 2 0.000 0.000 0.000 0
102 2 0.000 0.000 -0.100 0
103 2 0.000 0.000 -0.200 0
104 2 0.000 0.000 -0.300 0
105 2 0.000 0.000 -0.400 0
106 2 0.000 0.000 -0.500 0
107 2 0.000 0.000 -0.600 0
108 2 0.000 0.000 -0.700 0
109 2 0.000 0.000 -0.800 0
110 2 0.000 0.000 -0.950 0
111 2 0.000 0.000 -1.100 0
112 2 0.000 0.000 -1.250 0
113 2 0.000 0.000 -1.400 0
114 2 0.000 0.000 -1.600 0
115 2 0.000 0.000 -1.800 0
116 2 0.000 0.000 -2.000 0
117 2 0.000 0.000 -2.200 0
118 2 0.000 0.000 -2.400 0
119 2 0.000 0.000 -2.600 0
120 2 0.000 0.000 -2.800 0
121 2 0.000 0.000 -3.000 0
122 2 0.000 0.000 -3.200 0
123 2 0.000 0.000 -3.500 0
124 2 0.000 0.000 -3.800 0
125 2 0.000 0.000 -4.100 0
126 2 0.000 0.000 -4.400 0
127 2 0.000 0.000 -4.740 0
128 2 0.000 0.000 -5.080 0
```

```

#無質量剛はりの水平断面モデル<領域 2>を削除
DELT
  2

INTG
#コピーされた無質量剛はりの領域を一つの領域<領域 10>に統合する。
# IDN  ID      EPS
   10  28      -1.0
# IQ
   101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116
   117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128
#杭 2 本分の 3次元モデル<領域 3>と無質量剛はり<領域 10>を統合して
# 3次元杭モデル<領域 11>を生成
#する。節点も統合する。
# IDN  ID      EPS
   11   2      0.01
# IQ
   10   3
#フーチングの 3次元モデル<領域 7>とフーチング内に埋め込まれた杭 2 本分の 3次元モデル<領域 4>を
#統合して、フーチングモデル<領域 7>とする。節点も統合する。
#節点も統合する。
# IDN  ID      EPS
   7    2      0.01
# IQ
   7    4

COPY
#間隙水要素<領域 100>を地盤の 3次元モデル<領域 6>からコピーして生成する。
# IDN  IQ      DX      DY      DZ  MAT
   100  6      0.0      0.0      0.0  100

INTG
#間隙水要素<領域 100>を地盤の 3次元モデル<領域 6>に統合する。
# IDN  ID      EPS
   6    2      0.0
# IQ
   6   100

MPC1
# 3次元杭モデル<領域 11>と地盤の 3次元モデル<領域 6>の間の接触点に対して、
#xy 方向自由度を MPC 指定する。
# IDN  ID      EPS  IDOF
   11   1      0.01  110000
# TTL
PILE-SOIL INTERFACE (for STAT and DYNA)
# IQ
   6
# 3次元杭モデル<領域 11>とフーチングモデル<領域 7>の間の接触点（地表面）に対して、
#全方向の自由度を MPC 指定する。
# IDN  ID      EPS  IDOF
   11   1      0.0  111111
# TTL
PILE-PILE INTERFACE AT GROUND SURFACE (for STAT and DYNA)
# IQ
   7

MPC3
#循環境界条件（底面節点を除く）※動的解析のみ必要
# IDN MODE      EPS NPL  IDOF
   6    3      0.0  2 100000
#TTL
SHEAR BOX CONDITIONS (DYNA only)
#X  節点 1      2      3      4
   -8.15  -8.15  -8.15  -8.15
#Y
   0.00   0.00   1.75   1.75
#Z
#    0.00  -5.33  -5.33   0.00
   0.00  -5.30  -5.30   0.00
#X  節点 1      2      3      4
   3.45   3.45   3.45   3.45
#Y
   0.00   0.00   1.75   1.75
#Z
#    0.00  -5.33  -5.33   0.00
   0.00  -5.30  -5.30   0.00

```

```

BOUN
#地盤の3次元モデル<領域6>の底面境界条件
#IDN          NPL IDOF
   6          1 11100000
#TTL
BOTTOM BOUNDARY CONDITIONS: FIXED (for STAT and DYNA)
#X  節点1      2      3      4
   -8.15      3.45      3.45      -8.15
#Y
   0.00      0.00      1.75      1.75
#Z
   -5.33      -5.33      -5.33      -5.33
#地盤の3次元モデル<領域6>の対称面およびそれと平行な側面の境界条件
#IDN          NPL IDOF
   6          2 01000000
#TTL
SYMMETRY PLANE AND IT'S PARALLEL SIDE BOUNDARY CONDITIONS (for STAT and DYNA)
#X  節点1      2      3      4
   -8.15      -8.15      3.45      3.45
#Y
   0.00      0.00      0.00      0.00
#Z
   0.00      -5.33      -5.33      0.00
#X  節点1      2      3      4
   -8.15      -8.15      3.45      3.45
#Y
   1.75      1.75      1.75      1.75
#Z
   0.00      -5.33      -5.33      0.00
#3次元杭モデル<領域11>の杭要素の底面境界条件 (埋込み)
#IDN          NPL IDOF
  11          1 11111100
#TTL
LOWER ENDS OF PILES: FIXED SUPPORT (for STAT and DYNA)
#X  節点1      2      3      4
   -8.15      3.45      3.45      -8.15
#Y
   0.00      0.00      1.75      1.75
#Z
   -5.33      -5.33      -5.33      -5.33
#地盤の3次元モデル<領域6>の左右側面の境界条件 ※初期自重解析のみ必要
#IDN          NPL IDOF
   6          2 10000000
#TTL
RIGHT SIDE AND LEFT SIDE BOUNDARY CONDITIONS (STAT only)
#X  節点1      2      3      4
   -8.15      -8.15      -8.15      -8.15
#Y
   0.00      0.00      1.75      1.75
#Z
   0.00      -5.33      -5.33      0.00
#X  節点1      2      3      4
   3.45      3.45      3.45      3.45
#Y
   0.00      0.00      1.75      1.75
#Z
   0.00      -5.33      -5.33      0.00

SORT
#XYZ,IRNUM
XZY 1

END

```

## 6-4 FLIP3D が示す液状化特性について

### 6-4-1 はじめに

FLIP の解析では、2次元解析と3次元解析のそれぞれで要素シミュレーションを行うと、等方圧密の条件では、同等の液状化特性が得られる。これを等方圧密ではなくて、 $K_0$  圧密 ( $K_0=0.5$  程度) とした場合でも、2次元と3次元で同等の液状化特性が得られるか否かを確認する。

また、非液状化の場合でも、等方圧密、 $K_0$  圧密 ( $K_0=0.5$  程度) とともに、2次元解析と3次元解析で同等の応力～ひずみ関係が得られるか否かを、要素シミュレーションにて確認する。

### 6-4-2 解析定数

検討は既往の解析<sup>17)18)</sup>で取り扱った北関東地方の砂を用いて行われている。これに対する FLIP の解析地盤定数を表 6-4-1と表 6-4-2に示す。表 6-4-2には、二種類の液状化パラメータセットを示したが、ここでの検討では、下段の P1 というパラメータセットを使用する。

表 6-4-1 FLIP の解析地盤定数 (変形特性)

質量密度		変形特性							
初期自重 解析用	地震応答 解析用	基準初期 せん断剛性	基準体積 弾性係数	基準平均 有効応力	拘束圧 依存係数	間隙率	内部 摩擦角	粘着力	履歴減衰 上限値
$\rho$	$\rho$	$G_{ma}$	$K_{ma}$	$\sigma_{ma}'$	$m_G, m_K$	$n$	$\phi_f$	$c$	$h_{max}$
t/m <sup>3</sup>	t/m <sup>3</sup>	kPa	kPa	kPa			(°)	kPa	
1.00	2.00	18170	47385	7.9	0.50	0.413	43.5	—	0.24

表 6-4-2 FLIP の解析地盤定数 (液状化特性)

略称	液状化特性						備考
	変相角	液状化パラメータ					
		$\phi_p$ (°)	w1	p1	p2	c1	
P0	28.0	1.000	0.700	1.100	1.600	0.005	平成14年度杭基礎WG報告書 <sup>19)</sup>
P1	28.0	1.150	0.500	0.850	1.750	0.001	3次元解析WGで、新たに設定したパラメータ

### 6-4-3 液状化試験 1 (2次元解析と3次元解析の対比)

#### (1) 解析ケース

水平成層地盤において、実際に地盤要素が受けるであろう応力履歴、すなわち、 $K_0$ 圧密 ( $K_0=0.5$ 程度)後に平面ひずみ的な拘束条件下で非排水繰返しせん断する応力履歴を要素シミュレーションにて考慮して、その場合の液状化抵抗を2次元解析と3次元解析で比較する。比較対照として、等方圧密後に平面ひずみ的な拘束条件下で非排水繰返しせん断される場合の液状化抵抗も2次元解析と3次元解析で比較する。

想定地盤において GL-0.5m と GL-4.0m における有効上載圧をそれぞれ 4.9kPa、39.2kPa とした (前者を低拘束圧、後者を高拘束圧と呼ぶ)。これに対応する平均有効応力は、有効上載圧の  $3/4$  倍 ( $= (1+K_0) / 2$ ,  $K_0=0.5$ )として、それぞれ 3.675kPa と 29.4kPa と設定した。等方圧密では、 $\sigma_{m0}'=3.675\text{kPa}$  あるいは  $29.4\text{kPa}$  となるよう等方に圧密した。 $K_0$ 圧密では、水平方向変位を拘束した状態で、 $\sigma_{v0}'=4.9\text{kPa}$  あるいは  $39.2\text{kPa}$  を作用させた。

この他に、3次元解析では、サブプレーンセットを計算時間が少なくなるように10面体とした場合と、通常の25面体とした場合の両方を試した。解析ケースを表 6-4-3に示す。

#### (2) 解析結果

$K_0$ 圧密後の平均有効応力を表 6-4-4に示す。

また、各ケースの液状化抵抗曲線を図 6-4-1～図 6-4-4に示す。

低拘束圧でも高拘束圧でも、等方圧密の場合は、2次元解析と3次元解析では液状化抵抗曲線は概ね等しいが、 $K_0$ 圧密の場合は、2次元解析と比べて3次元解析の方が液状化抵抗は大きい。3次元解析の方は、等方圧密、 $K_0$ 圧密とも、概ね同程度の液状化抵抗を示すが、2次元解析では、 $K_0$ 圧密の場合は液状化抵抗が低下する傾向にある。

拘束圧の違いや、3次元解析のサブプレーンセットの違いによる影響は小さい。

表 6-4-3 液状化試験 1 解析ケース一覧

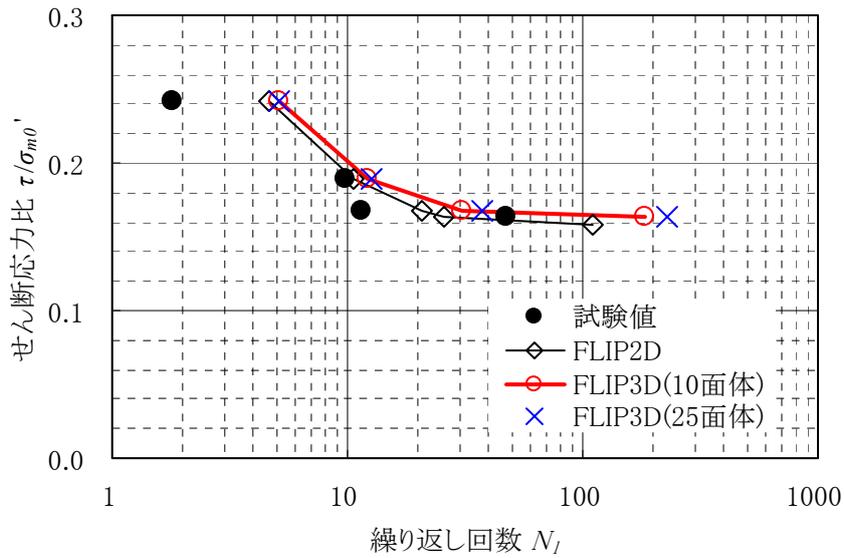
試験方法		次元	サブ プレーン	初期拘束圧	ケース名	備考
等方圧密	等方圧密後、平面ひずみの拘束条件下で繰り返し単純せん断する。	2次元	—	$\sigma_{m0}'=3.675\text{kPa}$	Case-1-1_2D	GL-0.5m 相当
			—	$\sigma_{m0}'=29.4\text{kPa}$	Case-1-2_2D	GL-4.0m 相当
		3次元	10面体	$\sigma_{m0}'=3.675\text{kPa}$	Case-1-1_3D10	GL-0.5m 相当
			25面体	$\sigma_{m0}'=3.675\text{kPa}$	Case-1-1_3D25	GL-0.5m 相当
			10面体	$\sigma_{m0}'=29.4\text{kPa}$	Case-1-2_3D10	GL-4.0m 相当
			25面体	$\sigma_{m0}'=29.4\text{kPa}$	Case-1-2_3D25	GL-4.0m 相当
$K_0$ 圧密	$K_0$ 圧密後（水平方向変位拘束下で $\sigma_v'$ を与える）、平面ひずみの拘束条件下で繰り返し単純せん断する。	2次元	—	$\sigma_{v0}'=4.9\text{kPa}$	Case-2-1_2D	GL-0.5m 相当
			—	$\sigma_{v0}'=39.2\text{kPa}$	Case-2-2_2D	GL-4.0m 相当
		3次元	10面体	$\sigma_{v0}'=4.9\text{kPa}$	Case-2-1_3D10	GL-0.5m 相当
			25面体	$\sigma_{v0}'=4.9\text{kPa}$	Case-2-1_3D25	GL-0.5m 相当
			10面体	$\sigma_{v0}'=39.2\text{kPa}$	Case-2-2_3D10	GL-4.0m 相当
			25面体	$\sigma_{v0}'=39.2\text{kPa}$	Case-2-2_3D25	GL-4.0m 相当

※FLIP2D は、いずれも ITMP3=0, ITERMD=0 で要素シミュレーションを実施する。

表 6-4-4  $K_0$ 圧密後の平均有効応力

拘束圧	次元	サブ プレーン	ケース名	初期有効 上載圧	初期平均有効応力	
					想定値	$K_0$ 圧密結果
低拘束圧	2次元	—	Case-2-1_2D	4.9kPa	3.675kPa	3.618kPa
	3次元	10面体	Case-2-1_3D10			3.467kPa
	3次元	25面体	Case-2-1_3D25			3.437kPa
高拘束圧	2次元	—	Case-2-2_2D	39.2kPa	29.4kPa	28.95kPa
	3次元	10面体	Case-2-2_3D10			27.74kPa
	3次元	25面体	Case-2-2_3D25			27.49kPa

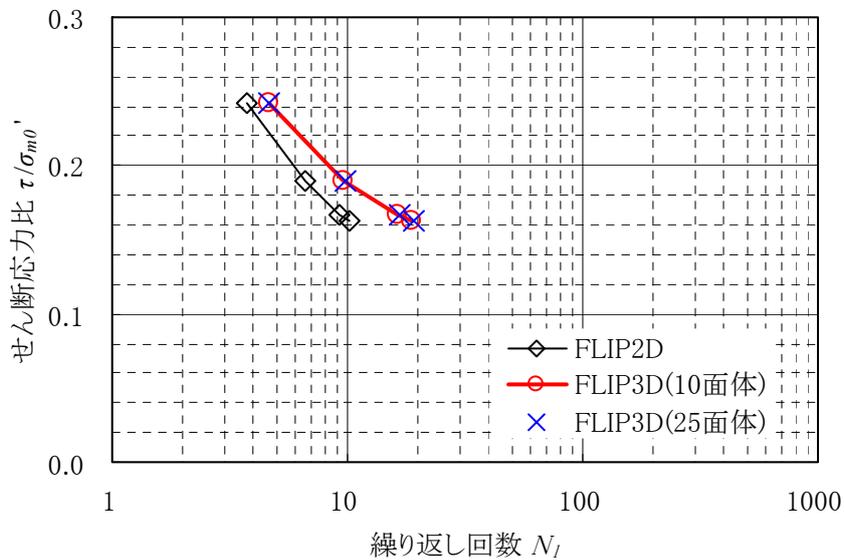
Case-1-1 液状化抵抗曲線 (液状化パラメータ:P1)



※1 液状化判定はひずみ片振幅 3.75% ※2 試験値は  $\sigma'_c=29.4\text{kPa}$  のもの。

図 6-4-1 等方圧密・低拘束圧 (Case-1-1 シリーズ) の場合の液状化抵抗曲線

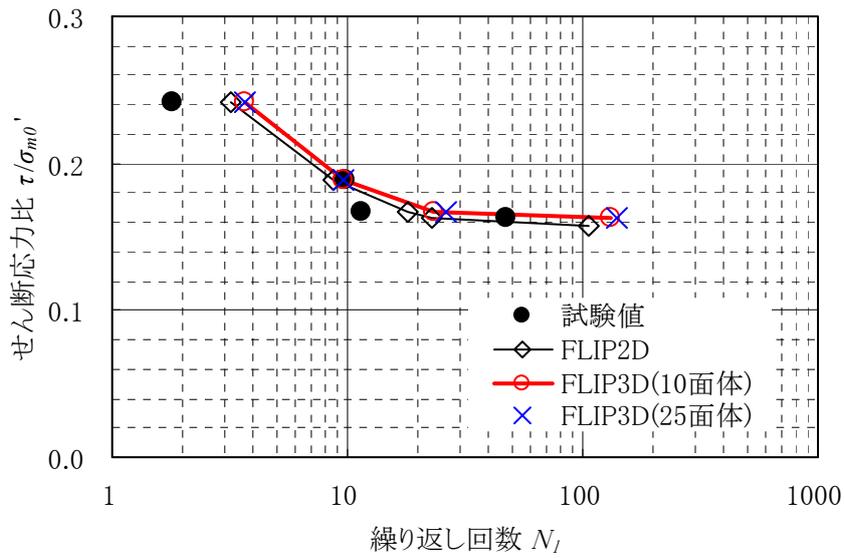
Case-2-1 液状化抵抗曲線 (液状化パラメータ:P1)



※1 液状化判定はひずみ片振幅 3.75%

図 6-4-2  $K_0$  圧密・低拘束圧 (Case-2-1 シリーズ) の場合の液状化抵抗曲線

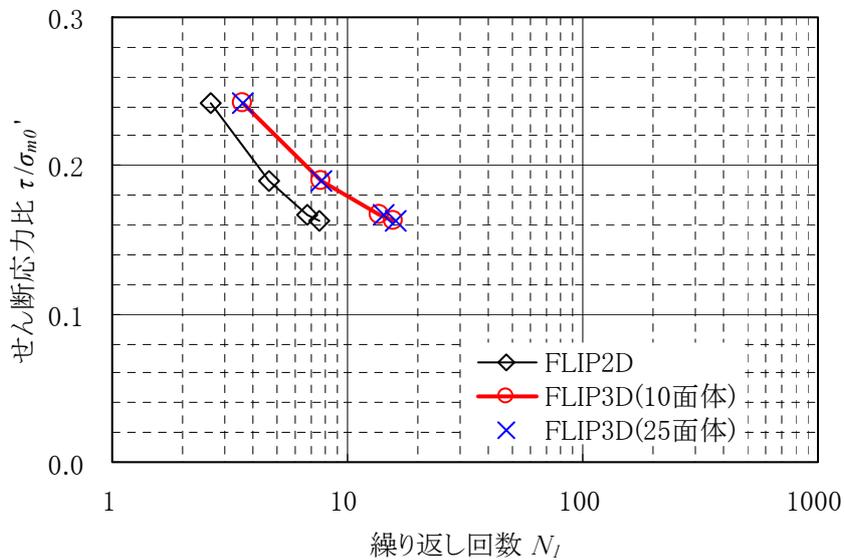
Case-1-2 液状化抵抗曲線 (液状化パラメータ:P1)



※1 液状化判定はひずみ片振幅 3.75% ※2 試験値は  $\sigma'_c=29.4\text{kPa}$  のもの。

図 6-4-3 等方圧密・高拘束圧 (Case-1-2 シリーズ) の場合の液状化抵抗曲線

Case-2-2 液状化抵抗曲線 (液状化パラメータ:P1)



※1 液状化判定はひずみ片振幅 3.75%

図 6-4-4  $K_0$  圧密・高拘束圧 (Case-2-2 シリーズ) の場合の液状化抵抗曲線

#### 6-4-4 液状化試験 2 (K<sub>0</sub> を変化させた要素シミュレーション)

##### (1) 解析ケース

2次元解析および3次元解析における液状化抵抗へのK<sub>0</sub>の影響をさらに詳細に見るために、初期平均有効応力σ<sub>m0</sub>'が29.4kPaになるように、K<sub>0</sub>を0.5、1.0、1.5に変えて圧密を行う。この際、上下方向の直応力σ<sub>v0</sub>'と水平方向の直応力σ<sub>h0</sub>'を直接制御して、平均有効応力が厳密に29.4kPaになるようにする。圧密後に、平面ひずみ的な拘束条件下で非排繰り返しせん断を行い、液状化抵抗曲線を求める。

なお、3次元解析ではサブプレーンセットは25面体とした。また、2次元解析では、従来法(ITMP3=0, ITERMD=0)の他に、改良法(ITMP3=2, ITERMD=2)も試した。

解析ケースの一覧を表6-4-5に示す。

##### (2) 解析結果

各ケースの液状化抵抗曲線を図6-4-5～図6-4-7に示す。

2次元解析の場合は、K<sub>0</sub>=1.0の場合に比べて、異方圧密であるK<sub>0</sub>=0.5、1.5の場合の液状化抵抗が低下する傾向にある。この傾向は、従来法でも改良法でも同じである。それに比べると3次元解析では、液状化抵抗の変動が小さい。しかし、K<sub>0</sub>=1.0に比べるとK<sub>0</sub>=0.5の方がやや液状化抵抗が大きめである。液状化試験1での3次元のK<sub>0</sub>圧密の場合は、高拘束圧の場合、初期平均有効応力が27.5kPaであるのに対し、液状化試験2では29.4kPaになるので、その違いが現れたと考えられる。

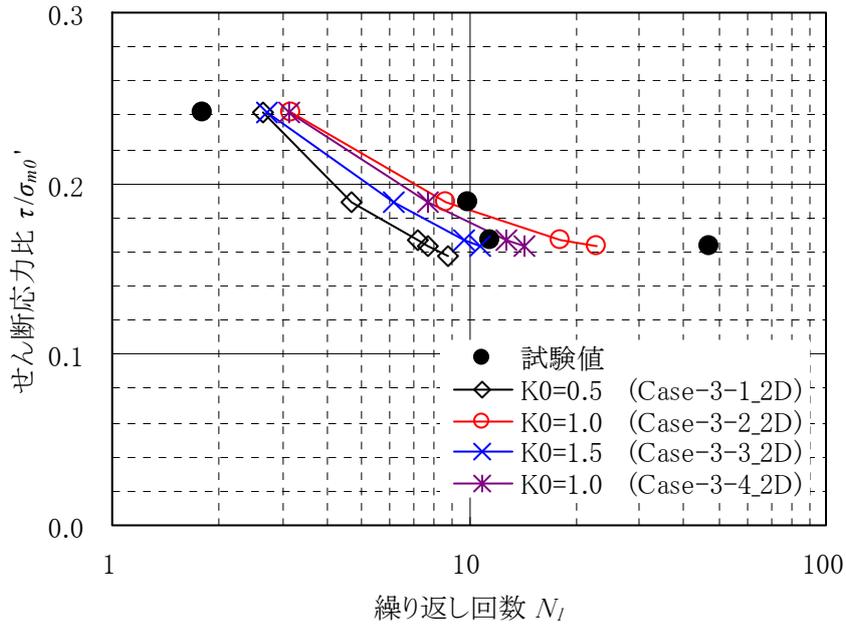
表 6-4-5 液状化試験 2 解析ケース一覧

試験方法		次元	初期拘束圧	ケース名	備考
σ <sub>m0</sub> '一定	平均有効応力が所定の値になるよう異方圧密後、平面ひずみ的な拘束条件下で繰り返し単純せん断する。	2次元	σ <sub>m0</sub> '=29.4kPa, K <sub>0</sub> =0.5	Case-3-1_2D	
			σ <sub>m0</sub> '=29.4kPa, K <sub>0</sub> =1.0	Case-3-2_2D	
			σ <sub>m0</sub> '=29.4kPa, K <sub>0</sub> =1.5	Case-3-3_2D	
		3次元	σ <sub>m0</sub> '=29.4kPa, K <sub>0</sub> =0.5	Case-3-1_3D	
			σ <sub>m0</sub> '=29.4kPa, K <sub>0</sub> =1.0	Case-3-2_3D	
			σ <sub>m0</sub> '=29.4kPa, K <sub>0</sub> =1.5	Case-3-3_3D	

※2次元解析は、従来法(ITMP3=0, ITERMD=0)および改良法(ITMP3=2, ITERMD=2)の両方で要素シミュレーションを実施する。

※3次元解析ではサブプレーンセットは25面体とした。

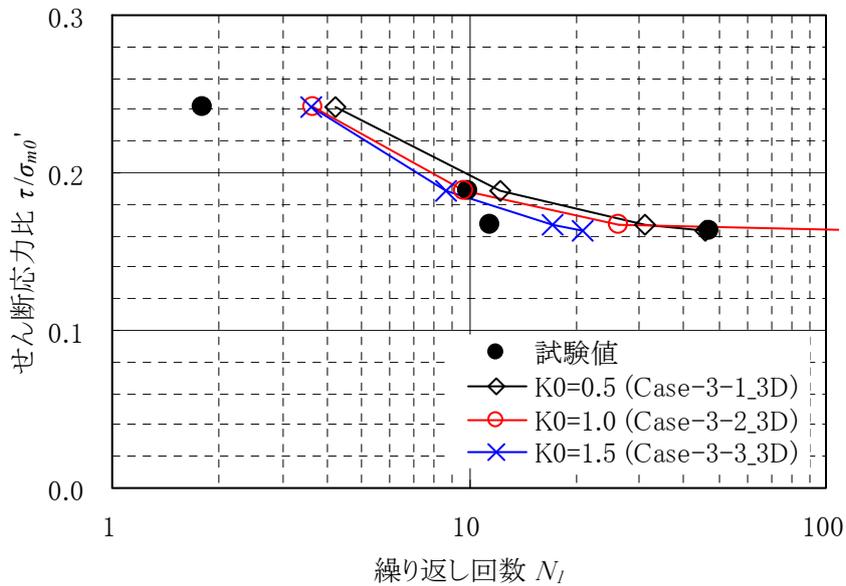
FLIP2D (従来法) 液状化抵抗曲線



※1 液状化判定はひずみ片振幅 3.75% ※2 試験値は  $\sigma_c'=29.4\text{kPa}$  のもの。

図 6-4-5 FLIP の 2 次元解析 (従来法) による液状化抵抗曲線

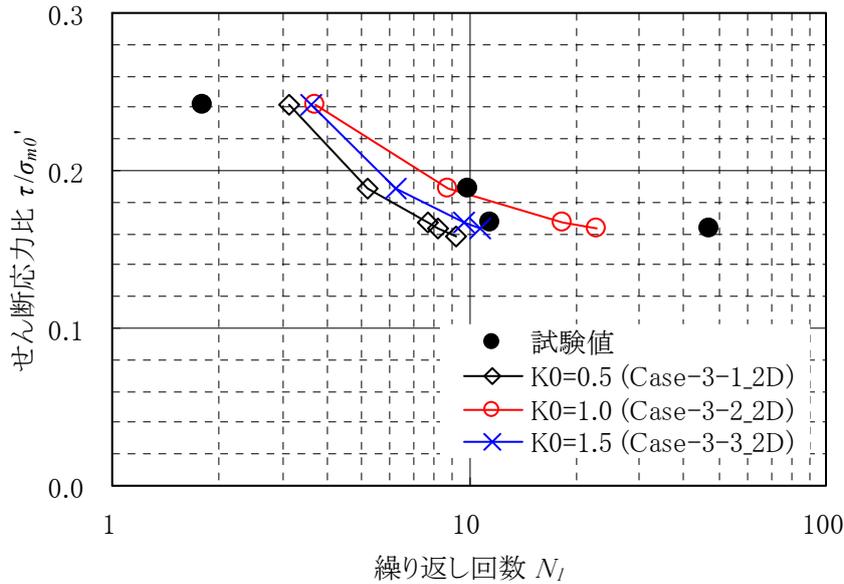
FLIP3D 液状化抵抗曲線



※1 液状化判定はひずみ片振幅 3.75% ※2 試験値は  $\sigma_c'=29.4\text{kPa}$  のもの。

図 6-4-6 FLIP の 3 次元解析による液状化抵抗曲線

FLIP2D(改良法) 液状化抵抗曲線



※1 液状化判定はひずみ片振幅 3.75% ※2 試験値は  $\sigma'_c=29.4\text{kPa}$  のもの。

図 6-4-7 FLIP の 2 次元解析 (改良法) による液状化抵抗曲線

### (3) 以前の検討結果との関係

FLIP 研究会 SCP 作業部会では、初期平均有効応力が同じであれば、FLIP の 2 次元の要素シミュレーションによる液状化の進行は、 $K_0$  値によらずに、繰り返し回数と同じであれば、同一になる結論を得ている (SCP 改良地盤のモデル化に関する検討報告書<sup>20)</sup>)。

同報告書の図-2.6.6に掲載されている有効応力経路図の一部の再現計算を行ったところ、ほぼ同じ図が得られた (図 6-4-8)。ただ、この計算では、 $K_0=1.0$  の場合、一旦、 $K_0=0.5$  の状態を経由して (水平方向自由度を拘束して、 $\sigma'_{v0}$  を与える)、それから  $K_0=1.0$  になるよう側圧を加えている。同じ手順で、実験解析の解析地盤定数を用いて液状化抵抗曲線を求めた (図 6-4-5 の Case-3-4\_2D)。これによれば、最初から  $K_0=1.0$  になるよう圧密した場合とほぼ同程度の液状化抵抗になり、それに比べて  $K_0=0.5$  の液状化抵抗曲線が小さくなるという関係は変わらない。

従って、2 次元解析の場合は、条件によっては、液状化抵抗は  $K_0$  値によらずに一定となるが、微妙に異なる場合もある。

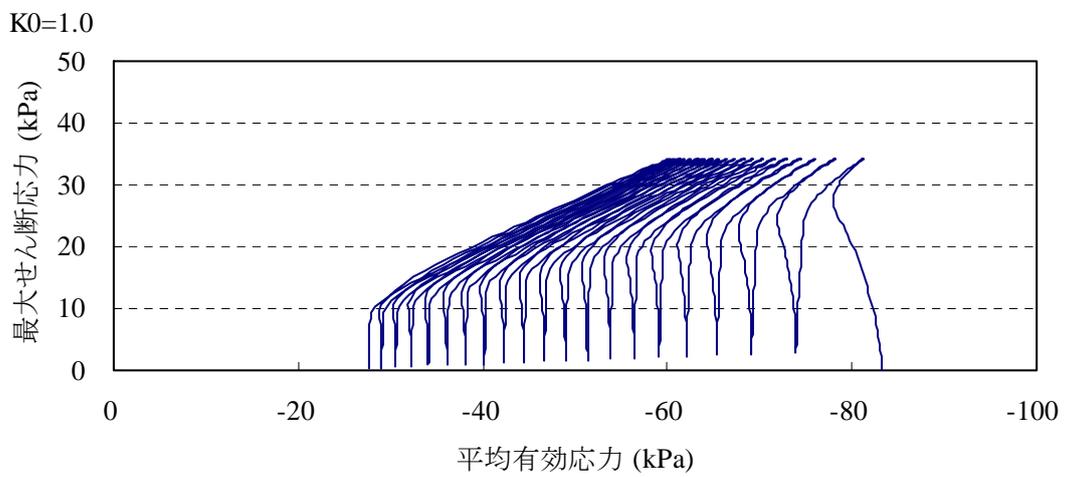
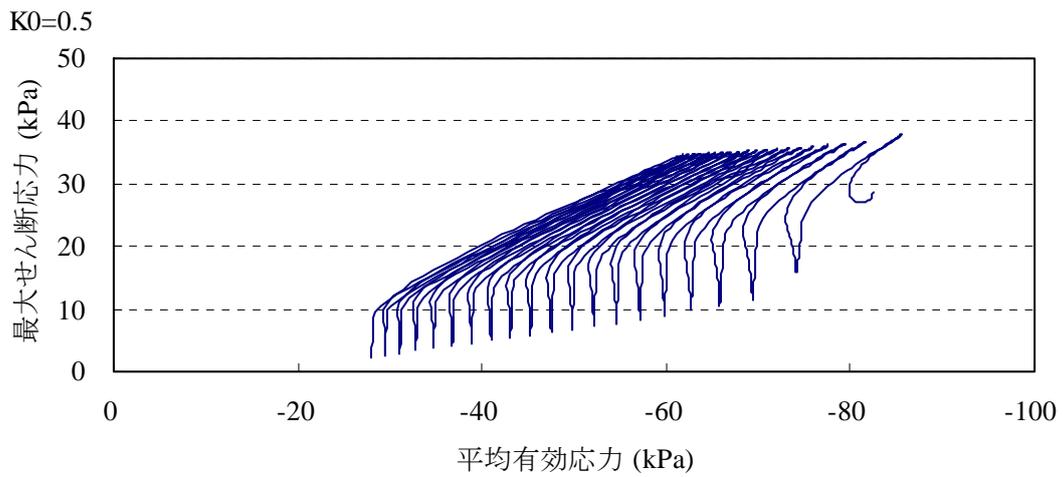


図 6-4-8 FLIP 研究会 SCP 作業部会の SCP 改良地盤のモデル化に関する検討報告書<sup>20)</sup>の  
 図-2.6.6 (p. 2-23) の一部再現計算結果 (2次元解析、繰り返し回数 10回)

## 6-4-5 非液状化試験（単調載荷の2次元解析と3次元解析の対比）

### (1) 解析ケース

非液状化解析の場合も、 $K_0$ 圧密（ $K_0=0.5$ 程度）後に単調せん断した場合、2次元解析と3次元解析では同じ挙動をするかどうかを確認する。

初期圧密として、 $K_0$ 圧密（ $K_0=0.5$ 程度）と比較対照用の等方圧密の二種類を行う。等方圧密では、 $\sigma_{m0}'=29.4\text{kPa}$ となるよう等方に圧密する。 $K_0$ 圧密では、水平方向変位を拘束した状態で $\sigma_{v0}'=39.2\text{kPa}$ を作用させる。これら圧密後に、平面ひずみ的な拘束条件下で、完全排水状態で単純せん断応力を単調に作用させる。

解析ケース一覧を表 6-4-6に示す。

### (2) 解析結果

解析結果を図 6-4-9～図 6-4-10に示す。

これらの図によれば、等方圧密の場合、圧密後に単調にせん断した場合のせん断応力～せん断ひずみ関係は、2次元解析と3次元解析ではほぼ同じである。これを $K_0$ 圧密（ $K_0=0.5$ 程度）としても、同様である。

表 6-4-6 非液状化試験 解析ケース一覧

試験方法		次元	初期拘束圧	ケース名
等方圧密	等方圧密後、平面ひずみ的な拘束条件下で単純せん断する。	2次元	$\sigma_{m0}'=29.4\text{kPa}$	Case-4-2_2D
		3次元	$\sigma_{m0}'=29.4\text{kPa}$	Case-4-2_3D25
$K_0$ 圧密	$K_0$ 圧密後（水平方向変位拘束下で $\sigma_v'$ を与える）、平面ひずみ的な拘束条件下で単純せん断する。	2次元	$\sigma_{v0}'=39.2\text{kPa}$	Case-5-2_2D
		3次元	$\sigma_{v0}'=39.2\text{kPa}$	Case-5-2_3D25

※3次元解析のサブプレーンセットは、25面体を使用。

Case-4-2 等方圧密後単純せん断

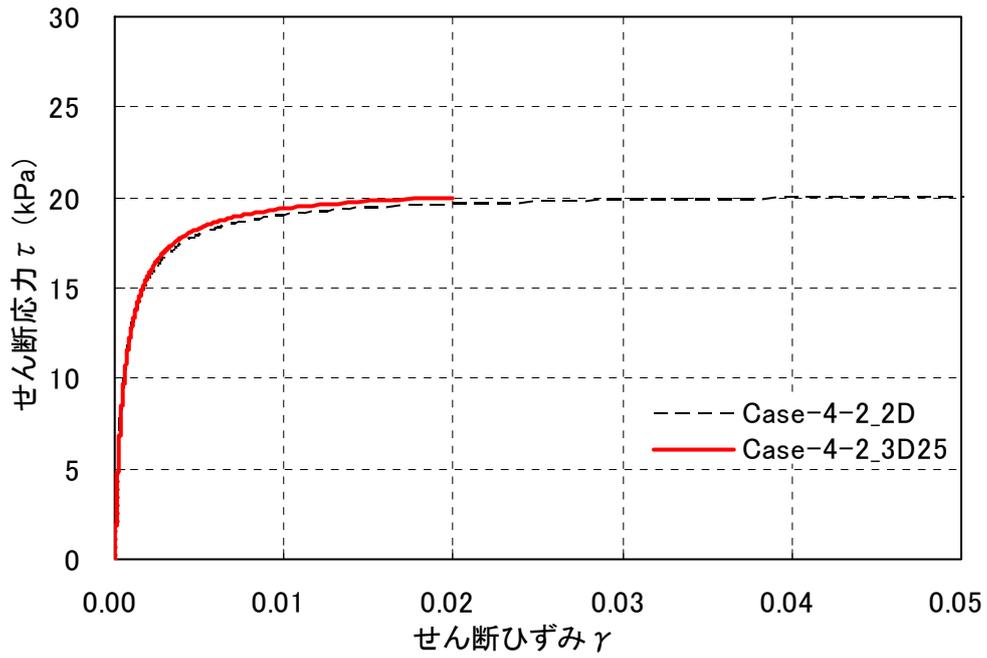


図 6-4-9 等方圧密後の単調せん断によるせん断応力～せん断ひずみ関係

Case-5-2  $K_0$ 圧密後単純せん断

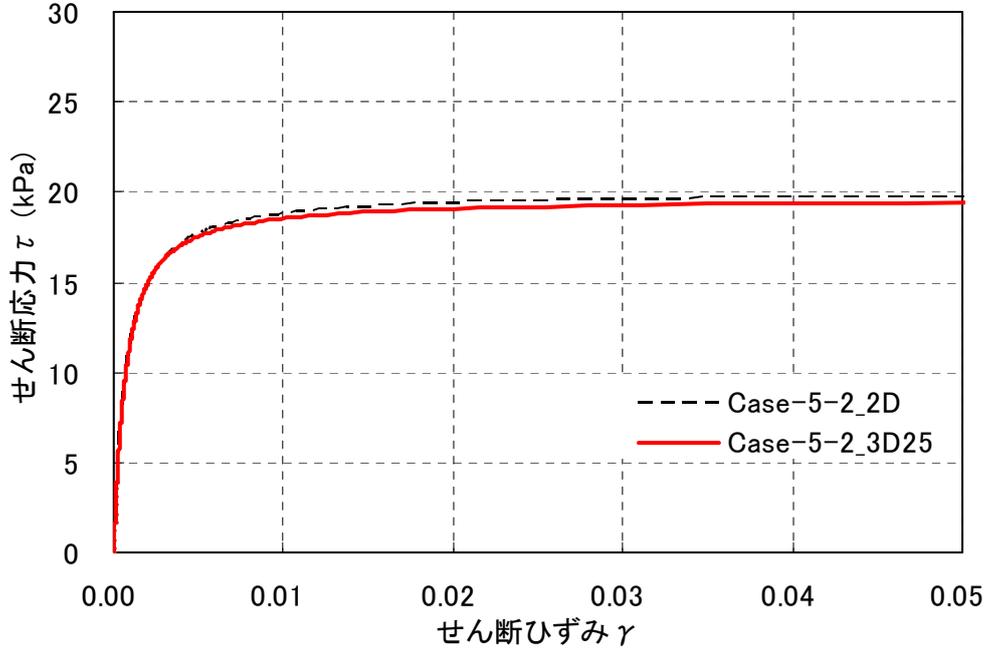


図 6-4-10  $K_0$ 圧密後の単調せん断によるせん断応力～せん断ひずみ関係

#### 6-4-6 結論

同じ液状化パラメータを用いた要素シミュレーションにおいて、等方圧密の場合は、2次元解析と3次元解析では液状化抵抗曲線はほぼ等しい。平均有効応力が等方圧密の場合と概ね等しくなるようにして実施した異方圧密の場合 ( $K_0=0.5, 1.5$ )、2次元解析では、等方圧密に比べて液状化抵抗が低下する傾向にある。一方、3次元解析の場合は、液状化抵抗の変動幅は小さい。

図 6-4-11には、3種類の  $K_0$  について実施された液状化試験に基づく液状化抵抗曲線を示す。この図の縦軸は有効上載圧で正規化したせん断応力振幅 ( $\tau_d/\sigma_{v0}'$ ) である。同じデータによる、縦軸を平均有効応力で正規化したせん断応力振幅 ( $\tau_d/\sigma_{m0}'$ ) に変更した場合の液状化抵抗曲線を図 6-4-12に示す。これらの図によれば、液状化抵抗曲線の縦軸を  $\tau_d/\sigma_{m0}'$  とする限り、液状化抵抗曲線は  $K_0$  には依存しない。これまで示した3次元の要素シミュレーション結果は、この事実に整合している。

非液状化の場合、等方圧密後に単調にせん断した場合のせん断応力～せん断ひずみ関係は、2次元解析と3次元解析ではほぼ同じである。これを  $K_0$  圧密 ( $K_0=0.5$  程度) としても、同様である。

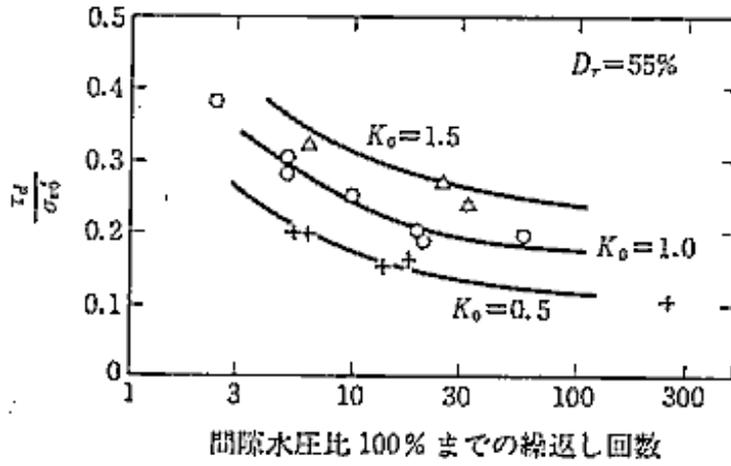


図 6-4-11 静止土圧係数が液状化抵抗に及ぼす影響 (石原他, 1977) <sup>21)</sup>

図の縦軸は  $\tau_d / \sigma_{v0}'$

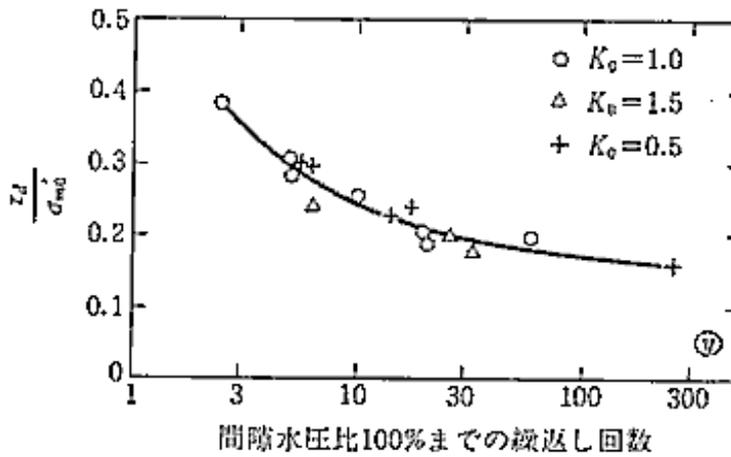


図 6-4-12 前図の鉛直有効応力  $\sigma_{v0}'$  を有効平均主応力  $\sigma_{m0}'$  で置き換えた図 (吉見, 1991) <sup>22)</sup>

図の縦軸は  $\tau_d / \sigma_{m0}'$

<6-2 節～6-4 節の参考文献>

- 1) Iai S.: Three dimensional formulation and objectivity of a strain space multiple mechanism model for sand, *Soils & Foundations*, Vol.33, No.1, pp.192-199, 1993.
- 2) Iai S., Ozutsumi O.: Yield and cyclic behavior of a strain space multiple mechanism model for granular materials, *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29(4), pp.417-442, 2005.10.
- 3) Iai,S., Matsunaga,Y. and Kameoka,T.: Strain space plasticity model for cyclic mobility, Report of Port and Harbour Research Institute, Vol.29, No.4, pp.27-56, 1990.
- 4) Ishihara,K., Yoshida,N. and Tsujino,S.: Modelling of stress-strain relations of soils in cyclic loading, Proc. of 5th International Conf. on Num. Methods in Geomechanics, Nagoya, Vol.1, pp. 373-380, 1985.
- 5) Iai,S., Matsunaga,Y. and Kameoka,T.: Parameter Identification for a Cyclic Mobility Model, Rep. of the Port and Harbour Res. Inst. Vol.29, No.4, pp.57-83, 1990.
- 6) Ozutsumi,O. and Iai,S.: Adjustment Method of the Hysteresis Damping for Multiple Shear Spring Model, Proc. of 4th International Conf. on Recent Advances in Geotech. Earthquake Eng. and Soil Dynamics, 2001.
- 7) Hughes T.J.R.: Generalization of Selective Integration Procedures to Anisotropic and Nonlinear Media, *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol.15, pp.1413-1418, 1980.
- 8) 山口柏樹(1985) : 土質力学 (全改訂) 、技報堂出版、p.156.
- 9) Owen D.R.J., HintonE.: *Finite elements in plasticity: Theory and Practice*, Pineidge Press Limited, 1980.
- 10) 第3期 FLIP 研究会 3次元解析作業部会: 平成17年度中間成果報告書, 平成18年7月.
- 11) 第3期 FLIP 研究会 3次元解析作業部会: 平成18年度最終成果報告書, 平成19年7月.
- 12) 吉見吉昭 : 第二版砂地盤の液状化,p.33,技報堂出版, 1991.
- 13) 時松孝次, 鈴木比呂子, 鈴木康嗣, 藤井俊二 : 大型振動台実験に基づく液状化過程における杭の地盤反力の評価、日本建築学会構造系論文集、第553号、pp.57-64, 2002.
- 14) Rolando P. Orense (1992): Modeling of permanent displacement of liquefied ground and its effects on structures, Chapter 7, pp.219-356, 東京大学学位論文.
- 15) 溜幸生・小出紀子・小堤治・岡由剛・井合進・梅木康之 : 飽和土中の埋設管の地盤反力に関する2次元平面ひずみ解析、第38回地盤工学研究発表会、pp.1865-1866, 2003.
- 16) 大都市大震災軽減化特別プロジェクト II 震動台活用による構造物の耐震性向上研究 (平成15年度) 成果報告書  
(<http://www.bosai.go.jp/sougou/eduse-pj/ddt-pj/report/result15/re-index.htm>)
- 17) 溜幸生・小堤 治・井合 進・芥川 博昭 : 液状化地盤と杭の相互作用を考慮した大型振動台実験の2次元有効応力解析、第42回地盤工学研究発表会、平成19年度発表講演集、

pp.1665-1666, 2007.

- 18) 溜幸生・小堤治・井合進・横山伸幸：液状化地盤における杭基礎の大型振動台実験の3次元動的有効応力解析、第43回地盤工学研究発表会、平成20年度発表講演集、pp.1635-1634, 2008.
- 19) 第2期FLIP研究会杭基礎作業部会：杭基礎のモデル化方法の検討 平成14年度成果報告書, 2003.7.
- 20) 第1期FLIP研究会SCP作業部会：SCP改良地盤のモデル化に関する検討報告書」, 平成11年7月.
- 21) Ishihara,K.,Iwamoto,S.,Yasuda,S.,Takatsu,H.: Liquefaction of Anisotropically Consolidated sand, Proc.9th, ICSMFE, Vol.2, pp.261-264, 1977.
- 22) 吉見吉昭：砂地盤の液状化（第二版），技法堂出版，pp.32~34，1991.